4. Les réels

1 Ensembles de nombres réels

1.1 Notations

Notation.

— L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni des lois internes $+$ et $\times$ est un corps commutatif, ce qui veut dire qu'on a le droit de calculer avec les réels comme on a l'habitude de le faire.

— L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des réels auquel on rajoute les symboles $+\infty$ (l'infini positif) et $-\infty$ (l'infini négatif), c'est-à-dire $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Les calculs de limites se font dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c.f. calculs de limites dans les fonctions).

— La notation $\mathbb{R}^+$ représente les réels positifs ou nuls, c'est-à-dire $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. $\mathbb{R}^-$ représente les réels négatifs ou nuls, c'est-à-dire $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.

— Le symbole $*$ en exposant d'un ensemble signifie qu'on enlève 0 de cet ensemble. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (qui se dit « R privé de zéro ») ou encore $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On a aussi $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$, etc.

Représentation graphique. L'axe des réels est représenté par une droite horizontale graduée. Tous les points de la droite sont des réels. On peut représenter les ensembles de réels par des portions de cette droite.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition.

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient aussi tous les réels intermédiaires, autrement dit I est un intervalle si, et seulement si elle vérifie :

$$\forall (c, d) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (c \leqslant x \leqslant d \ \Rightarrow \ x \in I).$$

Exemple. $\mathbb{R}^+$ est un intervalle car tout réel compris entre deux réels positif est positif. Par contre, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car 0 n'appartient pas à $\mathbb{R}^*$ et est compris entre 1 et -1 qui appartiennent à $\mathbb{R}^*$.

Remarque : L'intersection de deux intervalles est un intervalle. La réunion de deux intervalles n'est pas nécessairement un intervalle. Par exemple, la partie $[0; 1] \cup [2; 3]$ n'est pas un intervalle.

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'un des 10 types ci-dessous où a et b sont deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

$I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\} = [a; b]$ intervalle fermé borné ou segment

$I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\} = [a; b[$ intervalle borné semi-ouvert à droite

$I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\} =]a; b]$ intervalle borné semi-ouvert à gauche

$I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} =]a; b[$ intervalle borné ouvert

$I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x\} = [a; +\infty[$ intervalle fermé non majoré

$I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\} =]a; +\infty[$ intervalle ouvert non majoré

$I = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\} =]-\infty; b]$ intervalle fermé non minoré

$I = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\} =]-\infty; b[$ intervalle ouvert non minoré

$I = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$I = \varnothing$

Remarque : Tout singleton $\{a\}$ où a est un nombre réel est aussi un intervalle puisque $\{a\} = [a, a]$.

2 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

La relation de comparaison $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une **relation d'ordre**. Cela signifie que $\leqslant$ a les propriétés suivantes :

— $\leqslant$ est réflexive : pour tout réel x, on a $x \leqslant x$.

— $\leqslant$ est transitive : pour tous réels x, y et z, on a l'implication : ($x \leqslant y$ et $y \leqslant z$) $\Rightarrow x \leqslant z$.

— $\leqslant$ est antisymétrique : pour tous réels x, y, on a l'implication : ($x \leqslant y$ et $y \leqslant x$) $\Rightarrow x = y$.

Propriété 2.

La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif :

— $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$. On peut additionner un nombre de chaque coté d'une inégalité.

— $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \text{ et } z \geqslant 0) \implies xz \leqslant yz$. On peut multiplier chaque coté d'une inégalité par un nombre positif.

Propriété 3.

La relation d'ordre $\leqslant$ possède également les propriétés suivantes :

— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow -y \leqslant -x$. Multiplier une inégalité par -1 change le sens de l'inégalité.

— $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ (0 \leqslant x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant t) \Longrightarrow 0 \leqslant xz \leqslant yt$. On peut multiplier entre elles deux inégalités positives.

— $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ 0 < x \leqslant y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$. Passer à l'inverse dans une inégalité positive change le sens de l'inégalité.

— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant y \Longrightarrow x^2 \leqslant y^2$. Passer au carré dans une inégalité positive conserve le sens de l'inégalité.

2.1 Résoudre une équation ou inéquation simple dans $\mathbb{R}$.

Soit x un nombre inconnu. L'objectif est de déterminer toutes les valeurs de x solutions d'une équation ou inéquation (toutes les valeurs qu'on peut reporter dans l'équation ou l'inéquation).

Equation : on la reconnait au signe $=$.

On applique des opérations identiques de chaque
coté de l'égalité, jusqu'à arriver à isoler x d'un coté.

1. On **commence** par les termes qui sont additionné (ou soustrait) au terme contenant x. On additionne de chaque coté de l'égalité les mêmes termes, mais avec les signes opposés :

$$3x - 5 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5\boxed{+5} = 2\boxed{+5} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -a + 7$$

Au final, on a l'impression que le terme est passé de l'autre coté en changeant de signe.

2. Ensuite, on s'occupe de la quantité qui est multipliée par x. On multiplie par l'inverse de cette quantité de chaque coté :

$$3x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 3x\boxed{\times\frac{1}{3}} = 7\times\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{3}$$

Encore une fois, on a l'impression que le 3 est passé de l'autre coté. De même :

$$\frac{x}{5} = a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{5}\boxed{\times 5} = a\boxed{\times 5} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5a$$

Attention si la quantité qu'on divise ou multiplie est variable : vérifier qu'on ne divise (ou multiplie) pas par 0 ! Dans ce cas, il faut traiter cette situation comme un cas particulier à part !

S'il y a une fonction dans l'équation, on essaye d'appliquer la fonction contraire (la bijection réciproque) pour la simplifier. Attention : la bijection réciproque n'existe pas toujours, ou pas entièrement. Il n'y a pas de recette miracle !

$$e^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(e^x) = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 5$$

Attention, ce n'est pas une multiplication par ln !!! C'est une composition par ln.

Pour $x^2 = 5$, si on applique la racine carré de chaque coté, on obtient $x = \sqrt{5}$. Mais $x = -\sqrt{5}$ est aussi une solution, et on ne la trouve pas par cette méthode (c.f. valeur absolue). Donc cette méthode est fausse sans un minimum de précaution.

Pour $\cos x = \frac{1}{4}$, on ne peut pas résoudre juste en appliquant une fonction (c.f. cours ultérieur).

Inéquation : on la reconnait aux signes $\leqslant, \geqslant, <, >$.

Pour isoler x, on cherche encore à appliquer des opérations
sur les deux coté de l'inégalité... en faisant attention
que certaines opérations changent le sens de l'inégalité !

1. On **commence** par les termes qui sont additionné (ou soustrait) au terme contenant x. On additionne de chaque coté de l'inégalité les mêmes termes, mais avec les signes opposés. ça ne change pas le sens des inégalités :

$$6x + 4 \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 4\boxed{-4} \leqslant 3\boxed{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 6x \leqslant -1$$

2. Ensuite, on s'occupe de la quantité qui est multipliée par x. On multiplie par l'inverse de cette quantité de chaque coté : Attention ! Si ce terme est négatif, il faut changer le sens de l'inégalité !

$$6x \leqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x\boxed{\times\frac{1}{6}} \leqslant (-1)\boxed{\times\frac{1}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{-1}{6}$$

L'inégalité est restée la même. Par contre :

$$-4x \leqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad x\boxed{\geqslant}\frac{7}{-4}$$

Et si on ne sait pas le signe de la quantité : soit on ne divise pas, soit on traite séparément tous les cas (si c'est positif, négatif ou nul).

S'il y a une fonction, on essaye d'appliquer la fonction contraire (la bijection réciproque) pour la simplifier, en faisant attention en plus au sens de variation de la fonction. Si la fonction est croissante, l'inégalité ne change pas.

$$\ln(x) \geqslant -6 \quad \Leftrightarrow \quad \exp(\ln(x)) \geqslant \exp(-6) \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant e^{-6}$$

Si la fonction est décroissante , l'inégalité change de sens. Si la fonction a des parties croissantes et des parties décroissantes, on ne peut pas l'appliquer sur les deux coté de l'inégalité !

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue x : $x-2 < 4$, $3x+5 = -5$, $-2x-1 < -3$, $\frac{x}{4} - 3 \leqslant 1$. Présenter les solutions sous forme d'intervalle.

2.2 Tableau de signe

On veut déterminer le signe d'une quantité $Q(x)$ dépendant d'une variable x, ou alors résoudre une inéquation du type $Q(x) > 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) \geqslant 0$.

La quantité Q est constituée de produit ou de quotient de plusieurs quantité. Par exemple $Q(x) = A(x) \times B(x)$, $Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, $Q(x) = \frac{A(x) \times C(x)}{B(x)}$, etc... (on peut avoir autant de multiplication et de division qu'on veut !).

Technique. On étudie séparément le signe de chacune des quantités qui intervient dans Q et on présente le résultat sous forme d'un tableau. La première ligne est celle de x, on y met toutes les valeurs importantes (celles qui font un 0 quelque part) dans l'ordre croissant. Ensuite, on met une étude de signe par ligne, en mettant les symboles 0, + (positif) et - (négatif) selon les valeurs de x. Dans la dernière ligne, on met Q et on fait le bilan des signes et des 0 avec les règles suivantes :

1. Un 0 au numérateur donne un 0, un 0 au dénominateur donne une valeur interdite (notée double barre)
2. $++$ donne $+$, $--$ donne $+$, $-+$ donne $-$.

Dans cette dernière ligne, on regarde le signe qui nous intéresse et on garde le ou les intervalles de x correspondant.

Exemple. On veut savoir quand $Q(x) = \frac{(1-x)(2x+3)}{(x+5)}$ est positif.

1. On étudie le signe de $1-x$. On a $1-x = 0$ pour $x = 1$, avec positif avant 1 et négatif après 1.
2. On étudie le signe de $2x+3$. On a $2x+3 = 0$ pour $x = -\frac{3}{2}$, avec négatif avant et positif après.
3. On étudie le signe de $x+5$. On a $x+5 = 0$ pour $x = -5$, avec négatif avant et positif après. .

On obtient le tableau suivant :

x		-5		$-\frac{3}{2}$		1	
$1-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$Q(x)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc Q est positif quand $x \in]-\infty; -5[\cup \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

2.3 Majorant et minorant

Définition 4.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

— un nombre réel M est un majorant de A si $\forall x \in A,\ x \leqslant M$. Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.

— un nombre réel m est un minorant de A si $\forall x \in A,\ m \leqslant x$. Si A admet un minorant, on dit que A est minorée.

— Si A est majorée et minorée, alors on dit que A est bornée. Ce qui peut s'écrire de la manière suivante : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leqslant M$

Exemples.

1. On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par $A = [-1; 2] \cup [3; 4] \cup \{8\}$. Tout nombre réel $M \geqslant 8$ est un majorant de A et tout nombre réel $m \leqslant -1$ est un minorant de A. A est majorée et minorée, elle est donc bornée.
2. La partie $A = [7; +\infty[$ de $\mathbb{R}$ est minorée (par exemple par 6) mais n'admet aucun majorant. Elle n'est pas bornée.
3. L'intervalle $]-\infty, 8[$ est majoré par 8 mais n'est pas minoré donc il n'est pas borné.
4. $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré ni minoré.
5. l'intervalle $]1, 2[$ est borné.

Définition.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel.

— On dit que a est le plus grand élément de A si $a \in A$ et si a est un majorant de A. Quand il existe, le plus grand élément de A est unique et se note $\max(A)$.

— On dit que a est le plus petit élément de A si $a \in A$ et si a est un minorant de A. Quand il existe, le plus petit élément de A est unique et se note $\min(A)$.

Exemple.

1. Le plus grand élément de l'intervalle $[-6;4]$ de $\mathbb{R}$ est le réel 4. On note $\max([-6,4]) = 4$.

2. La partie A de $\mathbb{R}$ définie par $A =]-3;5[\cup \{7\}$ ne possède pas de plus petit élément : on ne peut pas trouver de minorant de A qui appartienne à A (en effet -3, qui n'appartient pas à A, est un minorant de A et on ne peut pas trouver de minorant de A supérieur à -3).

Exercice 2

1. Donner lorsqu'ils existent le plus petit élément et le plus grand élément des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :
   $A = \{3;12;-100;1\}$, $B = [0;1[\cup]3;4[$, $C = \{1/k; k \in \mathbb{Z}^*\}$, $D = \{1/k; k \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathbb{N}$.
2. Déterminer si les parties suivantes sont majorées et donner le cas échant un majorant :
   $F = \{3;12;-100\}$, $G =]-\infty, 8[$, $H = \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$.

2.4 Partie entière

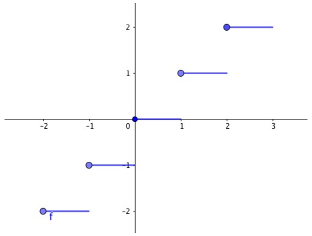
Définition 6.
Soit x un nombre réel, on appelle partie entière de x le plus grand entier inférieur ou égal à x et on le note $\lfloor x \rfloor$ (ou $E(x)$). Autrement dit,

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemples. $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$; $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$; $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Mais attention aux nombres négatifs : $\lfloor -1 \rfloor = -1$; $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$; $\lfloor -7,01 \rfloor = -8$.

Propriété 7.
La partie entière $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est une fonction croissante et continue par morceaux.

Ce qui veut dire que la partie entière conserve les inégalités :
$x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.



Exercice 1

($\star$)

1. Représenter graphiquement sur un axe réel gradué les ensembles suivants, puis les décrire à l'aide d'inégalités.

$$A =]5,1;7], \quad B = [-2;+\infty[, \quad C = [-4;6] \cap [2;9], \quad D = [-4;6] \cup [2;9]$$

$$E = [1;3[\cup[6;7,5], \quad F = [1;3[\cap[6;7,5], \quad G = ([-8;-6,5]\cup]-5;-3[)\cap]-7;-4,3]$$

2. Représenter graphiquement sur un axe réel gradué les ensembles suivants, puis les décrire à l'aide d'intervalles.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leqslant x \leqslant 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}, x > 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ et } -3 \leqslant x \leqslant 5,2\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant 4 \text{ ou } x > 7\}$$

Exercice 2

($\star\star$) Sur un graphique, représenter les ensembles suivants, puis les décrire à l'aide d'un produit d'intervalle.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant 5; \quad 2 \leqslant y \leqslant 4\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 < y < 1\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leqslant x \leqslant 4\}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 3\}$$

Exercice 3

($\star$) -2 est solution de quelle(s) équation(s) parmi les suivantes ?

$$2x = 0; \quad -x^2 - 2x = 0; \quad \frac{4}{x} + 1 = -1$$

Exercice 4

($\star$)Pour chacune des équations suivantes, déterminer parmi les nombres -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$ ceux qui sont solution de l'équation.

1. $x + 3 = 5x^2 - 1$
2. $3x^4 - x = 0$
3. $\frac{x+2}{x-1} = 0$
4. $x^3 = 2x$

Exercice 5

($\star\star$) Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnues x :

$$3x - 5 + z = 7; \quad 4 - 2x = 9; \quad \frac{x}{4} - 1 = \frac{7}{4}, \quad \frac{-x}{5} + \frac{5}{2} = \frac{1}{3}$$

$$3x - 5 + z < 7; \quad 4 - 2x < 9; \quad \frac{x}{4} - 1 < \frac{7}{4}, \quad \frac{-x}{5} + \frac{5}{2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{x} < 6, \quad \sqrt{x} \leqslant 9$$

Exercice 6

($\star\star$) Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signe.

$$(x-1)(4-3x) \leqslant 0; \quad \frac{x+5}{6-x} < 0; \quad \frac{2x+3}{(5-x)(3x-3)} \geqslant 0$$