1. Les bases du calcul

1 Calculer

1.1 Vocabulaires

Exercice 1

Compléter les mots manquants :

1. Dans l'expression $3x + 5$, $3x$ et 5 sont des ......
2. Dans l'expression $12xy$, 12, x et y sont des ......
3. 7y est le ...... de 7 et y.
4. $9 + x$ est la ...... de 9 et x
5. $4x - 11$ est la ...... de $4x$ et de 11
6. $\frac{6}{5x}$ est le ...... de 6 sur $5x$.
7. $\frac{1}{27}$ est l' ...... de 27
8. Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 90,1 sont des nombres ......
9. Les nombres -5 et $-\frac{1}{3}$ sont des nombres ......
10. Dans l'expression $2x + 2$, le nombre 2 est un ...... commun.

1.2 Les opérations de base

Les deux opérations de base sont addition et multiplication. soustraction est l'opération contraire de l'addition et la division celle de la multiplication.

A la main.

$$\begin{array}{r} 236 \\ +47 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 327 \\ -56 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times 56 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 247 & 7 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Exercice 2

Effectuez les opérations suivantes à la main : $638+199$; $745-176$; 76×32; $346\div8$.

Savoir décomposer un gros nombre en produit de petits nombre.

La plupart des nombres entiers qu'on utilise dans les exercices peuvent être divisés par des nombres plus petits, ce qui est utile pour les factorisations ou les mises au même dénominateur. Par exemple, $378 = 6 \times 7 \times 9 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$.

Pour ne pas chercher à l'aveugle les diviseurs faciles, quelques trucs :

— un nombre pair est divisible par 2, un nombre finissant par 0 ou 5 est divisible par 5.

— Si en additionnant les chiffre contenu dans le nombre, on obtient un multiple de 3, alors le nombre est divisible par 3

— On teste uniquement les divisions par 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17 (nombres premiers). Après, c'est trop gros pour la majorité des cas.

Exercice 3

Décomposer au maximum le nombre 1092 en produit de nombres plus petits.

Les identités remarquables.

A connaître absolument par coeur et dans les deux sens ! Il faut être capable de les reconnaître quand elles apparaissent.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Exercice 4

Développer $(x - 3)^2$ et $(5 - y)(5 + y)$.

Priorités de calculs

Les opérations de bases suivent un ordre de priorité. On fait en premier les multiplications (et puissances). Et en second les additions/soustractions. Par exemple : $2 \times 3 + 5 \times 10 - 20 = 6 + 50 - 20 = 36$. Mais

$$2 \times (3 + 5) \times 10 - 20 = 2 \times 8 \times 10 - 20 = 160 - 20 = 140$$

Dès qu'il y a des parenthèses, les priorités changent : un calcul à l'intérieur d'une parenthèse doit être faire en premier. Sinon, il faut trouver un moyen d'enlever la parenthèse, avant de faire le reste du calcul (voir section parenthèse). Par exemple : $(2 + 6) \times 5 = 8 \times 5 = 40$.

Exercice 5

Effectuer le calcul suivant : $2(2(x - 3) + 4(x + 5))$.

1.3 Avec des parenthèses

Les parenthèses sont indispensables pour séparer les éléments d'un calcul. Tout ce qui est entre parenthèses forme un bloc qu'on ne peut plus séparer. Selon la situation, diverses règles s'appliquent pour enlever (ou pas !) les parenthèses.

1. Derrière un signe d'addition, les parenthèses sont facultatives :

$$3 + (2 + 5x) = 3 + 2 + 5x = 5 + 5x$$

2. Derrière un signe de soustraction, parenthèses obligatoires :

$$3 - (2 + 5x)$$

Pour enlever les parenthèses, on distribue le signe $-$ sur chaque terme de l'intérieur de la parenthèse. Attention, un terme est séparé d'un autre par un + ou un -. Des nombres multipliés entre eux forment un seul terme : $2+5x$ comporte deux termes 2 et $5x$.

$$3-(2+5x)=3-2-5x=1-5x$$

On rappelle que $--$ donne un $+$ et que $-+$ donne un $-$.

3. Derrière un signe de multiplication, Parenthèses obligatoires :

$$3\times(2+5x)=3(2+5x)$$

Pour pouvoir enlever les parenthèses, on distribue le 3 sur chaque terme de l'intérieur de la parenthèse (Même attention que précédemment) :

$$3\times(2+5x)=6+15x$$

4. Dans une division (en haut), Parenthèse facultative :

$$\frac{(2+5x)}{3}=\frac{2+5x}{3}$$

5. Dans une division (en bas), Parenthèse facultative :

$$\frac{3}{(2+5x)}=\frac{3}{2+5x}$$

mais on ne peut rien faire avec le 2, le 3 et le $5x$!

6. Dans une puissance, parenthèses obligatoires :

$$(2+5x)^3,\qquad(5x)^3$$

n ne peut PAS enlever les parenthèses sans faire un calcul !

7. Dans une fonction, parenthèses obligatoires :

$$\ln(2+5x)$$

Ce qu'on fait avec les deux termes dépendra des formules autorisées pour la fonction. Ici, ON NE PEUT PAS SEPARER !

1.4 Développer et factoriser

Développer et factoriser sont des opérations opposés. Développer veut dire transformer une expression contenant des termes à parenthèses (avec ou sans puissances) séparés par des multiplication/division en une expression ne contenant que des addition/soustraction et quasiment plus de parenthèses. Factoriser, c'est le contraire, mais c'est plus difficile.

Développer le produit de deux parenthèses : On distribue, c'est à dire qu'on prend le premier terme de la première parenthèse, et qu'on le multiplie avec chaque terme de la deuxième parenthèse séparément. Puis on fait pareil avec le deuxième terme de la première parenthèse, puis avec le troisième terme (ne pas oublier d'inclure les -).

$$\begin{aligned}(2+x+3y)\times(1-x)&=2\times1+2\times(-x)+x\times1+x\times(-x)+3y\times1+3y\times(-x)\\&=2-2x+x-x^2+3y-3xy\end{aligned}$$

à noter : $3y$ est UN terme. on le distribue d'un seul coup. Tout comme $(-x)$. Ne pas oublier de simplifier !

Développer une puissance :

— avec les identités remarquables

$$(2x+3)^2=4x^2+6x+9$$

— avec la formule du binôme de Newton (chapitre à venir) pour les puissances entières positives.

$$(x+1)^6=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$$

— RIEN Pour les puissances non entières ou négatives (division)

$$(2x+3)^{\frac{3}{4}}\qquad(2x+3)^{-1}=\frac{1}{2x+3}$$

Exercice 6

Développer les expressions suivantes.

$$(2x-1)^2,\quad(5x+3)(6x-8),\quad(-5x+4)(x+1)^2,\quad(x+2)(x-1)(x+3)$$

Factoriser est l'opération inverse de développer. C'est beaucoup plus difficile, et ce n'est pas toujours possible mais on a deux moyens pour factoriser :

1. Reconnaitre une formule. Par exemple une identité remarquable.
2. Trouver un facteur commun dans tous les termes de l'expression. Alors, on l'écrit tout seul devant, puis on met derrière une parenthèse contenant ce qu'il reste de chacun des termes de l'expression quand on a enlevé cet élément en commun. Par exemple, dans l'expression $16x^2+4zx-10x$, on remarque que le x est dans tout les termes, ainsi qu'un facteur 2 pour les constantes :

$$\boxed{2}\times8\times\boxed{x}\times x+\boxed{2}\times2\times z\times\boxed{x}-5\times\boxed{2}\times\boxed{x}=\boxed{2x}(8x+2z-5)$$

Remarque : Quand on prend la totalité d'un terme comme facteur, il reste un 1 à sa place dans la parenthèse.

$$3z^2+3z=3z(z+1)$$

Factorisation forcée : Choisir un terme spécifique et le factoriser de force dans l'expression (dans certaines techniques seulement). Dans ce cas, on écrit ce terme tout seul devant, puis on met derrière une parenthèse contenant les termes de l'expression divisé par le terme en facteur.

$$4x\ln(x)+3x^2e^x-x^5 = 3x^2e^x\left(\frac{4x\ln(x)}{3x^2e^x}+1-\frac{x^5}{3x^2e^x}\right) = 3x^2e^x\left(\frac{4\ln(x)}{3xe^x}+1-\frac{x^3}{3e^x}\right)$$

Exercice 7

Factoriser les expressions suivantes quand c'est possible

$$r^2+9+6r,\quad 4x-12x^2+26x^3,\quad -7-13x-y,\quad \cos x+2c,\quad -25x^2-\frac{5}{2}\ln x$$

1.5 Les fonctions

Quand on écrit $f(x)$, ça ne veut pas dire f fois x, ça veut dire la fonction f qu'on applique à la variable x. On peut aussi l'appliquer à des expressions plus compliquée que x, ou juste à des valeurs numériques. Par exemple $f(3x+4)$ signifie f appliqué sur la quantité $(3x+4)$ d'un seul bloc, et $f(3)$ signifie f appliquée au nombre 3.

En particulier, il est INTERDIT de sortir quoique ce soit de la parenthèse de la fonction ou de distribuer. $f(x+y)$ n'est pas la même chose que $f(x)+f(y)$ et $f(2x)$ n'est pas la même chose que $2f(x)$. (sauf application linéaires dans les espaces vectoriels, on verra ça).

Il faut se méfier des fonctions habituelles comme cos, sin, ln... car on oublie souvent les parenthèses, et on risque de se tromper. Par exemple, que veut dire $\cos \pi x$? Est-ce que c'est $\cos(\pi)\times x = (-1)\times x = -x$ (le x n'est pas à l'intérieur de la fonction) ou $\cos(\pi x)$ (avec x dans la fonction) ?

Exercice 8

Dans les fonctions suivantes, remplacer la variable par 2, puis par $3x$ puis par $1+2x$

$$f(x)=4x+5,\quad g(x)=\frac{\ln x+5}{x},\quad h(x)=\cos(2x),\quad j(x)=x^2$$

1.6 Les fractions

Une fraction est le résultat de la division du numérateur par le dénominateur, qu'on écrit

$$Numerateur \div Denominateur = \frac{Numerateur}{Denominateur}$$

parce qu'on ne peut pas l'écrire sous une forme plus simple. Par exemple $\frac{1}{3}$ est le résultat de 1 divisé par 3, c'est à dire 0,33333333333333..... (à l'infini). On ne peut pas écrire l'infini, donc on le met sous forme de fraction. Mais $\frac{6}{2}$ peut s'écrire 3 (simplification). On va rappeler rapidement comment manier les fractions : simplification, addition, soustraction, multiplication, division.

Simplifier. ça veut dire enlever un facteur commun au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{12x^2}{20x} = \frac{4\times 3\times x\times x}{4\times 5\times x} = \frac{3\times x}{5}$$

Mais attention, dans $\frac{2ax+3}{3at}$, le a ne peut pas se simplifier ! et le 3 non plus. Pour pouvoir simplifier une fraction compliquée, il faut utiliser la factorisation. On factorise au numérateur le terme qu'on veut simplifier. On factorise au dénominateur le terme qu'on veut simplifier. Et ensuite on simplifie ce terme (et rien d'autre) :

$$\frac{2x-x^2+7xe^x}{3x-xe^x} = \frac{x(2-x+7e^x)}{x(3-e^x)} = \frac{2-x+7e^x}{3-e^x}$$

Avec des valeurs numériques, des simplifications aussi sont possibles en décomposant en petits nombres les numérateur et dénominateur :

$$\frac{520}{182} = \frac{13\times 5\times 2\times 2\times 2}{13\times 2\times 7} = \frac{5\times 2\times 2}{7} = \frac{20}{7}$$

Technique qui re-servira pour les mises au même dénominateur.

Exercice 9

Simplifier les fractions suivantes au maximum.

$$\frac{21}{126},\quad \frac{25x+10x^2}{5x^3-5x},\quad \frac{36\ln(x)+3x}{9x+6x^2},\quad \frac{4x^2+8x^3-2x^4\ln x}{3x^2+3x}$$

Multiplier et diviser. Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.

$$\frac{a}{b}\times\frac{x}{y} = \frac{a\times x}{b\times y}$$

Pour multiplier un nombre par une fraction, on imagine que le nombre seul est une fraction sur 1, donc on multiplie juste en haut

$$a\times\frac{x}{y} = \frac{a\times x}{y}$$

Pour diviser par une fraction, on multiplie par la fraction "retournée" (le haut devient le bas et le bas devient le haut)

$$\frac{a}{\frac{x}{y}} = a\times\frac{y}{x} = \frac{ay}{x}$$

pareil pour diviser une fraction par une autre : on retourne le diviseur (et seulement lui !)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \times \frac{y}{x} = \frac{ay}{bx}$$

Dans ce genre d'échafaudage, il faut bien repérer où est le trait de fraction central, celui qui sépare le haut et le bas. Ce trait doit se trouver au niveau du = sinon c'est une autre fraction.
Et n'oubliez pas les parenthèses quand il y a des termes compliqués...

$$\frac{3x+1}{2x-4} \times \frac{a}{b} = \frac{(3x+1)}{(2x-4)} \times \frac{a}{b} = \frac{(3x+1)a}{(2x-4)b} = \frac{3xa+a}{2xb-4b}$$

Exercice 10

Effectuer les opérations suivantes, et simplifier le résultat quand c'est possible :

$$10 \times \frac{x}{2}; \quad \frac{2}{7} \times \frac{3x}{5}; \quad \frac{4-x}{8} \times \frac{3x}{5+4x}; \quad \frac{\frac{6x}{7}}{3x}; \quad \frac{\frac{4x}{3}}{\frac{2}{7x}}; \quad \frac{4}{\frac{x+1}{7x}}$$

Addition et soustraction. Quand il y a des additions au numérateur d'une fraction, on peut (si besoin) séparer la fraction en plusieurs fractions :

$$\frac{a+b+c}{3x} = \frac{a}{3x} + \frac{b}{3x} + \frac{c}{3x}$$

Quand il y a des additions au dénominateur.... on ne fait RIEN. $\frac{3x}{a+b-c}$ ne peut pas être transformée.

Pour additionner plusieurs fractions, il faut les mettre au même dénominateur. La méthode directe consiste à multiplier (en haut et en bas) chaque fraction par le dénominateur de l'autre fraction :

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay}{by} + \frac{xb}{by} = \frac{ay+xb}{by}$$

Mais il vaut mieux chercher le dénominateur commun. On décompose en produit de petits termes ou nombre le dénominateur de chaque fraction, on regarde les éléments en commun. Et on rajoute à une fraction (par multiplication en haut et en bas) les termes de l'autre dénominateur qui lui manque :

$$\frac{(2x+1)}{12x(5-x)^2} + \frac{4}{21x^2(5-x)} = \frac{(2x+1)}{3 \times 4x(5-x)(5-x)} + \frac{4}{3 \times 7xx(5-x)}$$

$$= \frac{(2x+1)}{3x(5-x) \times 4(5-x)} + \frac{4}{3x(5-x) \times 7x}$$

Le $3x(5-x)$ est en commun. Je multiplie la première fraction par $7x$ et la deuxième par $4(5-x)$:

$$= \frac{(2x+1) \times 7x}{3x(5-x) \times 4(5-x) \times 7x} + \frac{4 \times 4(5-x)}{3x(5-x) \times 7x \times 4(5-x)} = \frac{7x(2x+1) + 16(5-x)}{3x(5-x) \times 4(5-x) \times 7x}$$

$$= \frac{14x^2 + 7x + 80 - 16x}{84x^2(5-x)^2} = \frac{14x^2 - 9x + 80}{84x^2(5-x)^2}$$

Pour faire une soustraction, c'est le même principe. Sauf qu'il faut savoir ce qu'on fait du −. Quand un signe − est devant une fraction (devant le trait de fraction), on peut le mettre au numérateur OU au dénominateur, mais pas les deux à la fois. Ne pas oublier de mettre les parenthèses afin de distribuer le − à tout les termes :

$$-\frac{2x+4}{3-x} = \frac{-(2x+4)}{3-x} = \frac{-2x-4}{3-x}$$

ou alors, si on veut mettre le signe au dénominateur :

$$-\frac{2x+4}{3-x} = \frac{2x+4}{-(3-x)} = \frac{2x+4}{-3+x}$$

Exercice 11

Effectuer les opérations suivantes, et simplifier le résultat quand c'est possible :

$$\frac{1}{42} + \frac{2}{81}; \quad \frac{x+1}{3x} + \frac{7}{12}; \quad \frac{2}{2x+1} - \frac{5x+3}{7}$$

1.7 Les puissances et la racine carrée

Une puissance entière positive est une multiplication :

$$a^2 = a \times a, \quad a^3 = a \times a \times a, \quad a^4 = a \times a \times a \times a \cdots$$

Une puissance entière négative signifie une division :

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \times a}, \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a \times a \times a} \quad a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a \times a \times a \times a} \cdots$$

Une racine carré est considérée comme une puissance, c'est la puissance $\frac{1}{2}$: $\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$.

Avec les autres opérations. Ces fonctions sont compatibles avec la division/multiplication et incompatible avec addition/soustraction.

$$\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n}, \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

C'est à dire qu'on peut "distribuer" la puissance ou la racine carré sur un produit ou une fraction (ou inversement regrouper les termes en une seule puissance si tout les termes ont la même puissance). Mais jamais dans une addition ou une soustraction. Et encore une fois : placez des parenthèses !!

Exemple.

$$(3xy)^2 = 3^2x^2y^2 \qquad \sqrt{2ax} = \sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{x}$$

$$3^3x^3 = (3x)^3 \qquad 3^2x^3 = (3x)^2x \qquad \sqrt{5}\sqrt{x} = \sqrt{5x}$$

Avec une division :

$$\left(\frac{2}{3x}\right)^2 = \frac{2^2}{(3x)^2} = \frac{2^2}{3^2x^2} \qquad \sqrt{\frac{2}{3x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{x}}$$

Mais avec $(2a+t)^2$ ou $\sqrt{2a+t}$, il est interdit de séparer en distribuant le carré. De même, avec a^2+t^2 ou $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, il est interdit de regrouper.

Pour le carré ou les puissances entières, il existe des formules pour développer les additions et soustractions simples : les identités remarquables et le binôme de Newton (au programme cette année). Par contre, pour la racine carrée ou les puissances négatives, il n'y a aucune identité remarquable !

Opérations dans la puissance.

Une addition dans la puissance donne une multiplication : $\boxed{a^{x+y} = a^x \times a^y}$

Une soustraction dans la puissance donne une division : $\boxed{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}$

Une multiplication dans la puissance donne une puissance de puissance : $\boxed{a^{xy} = (a^x)^y}$

Exercice 12

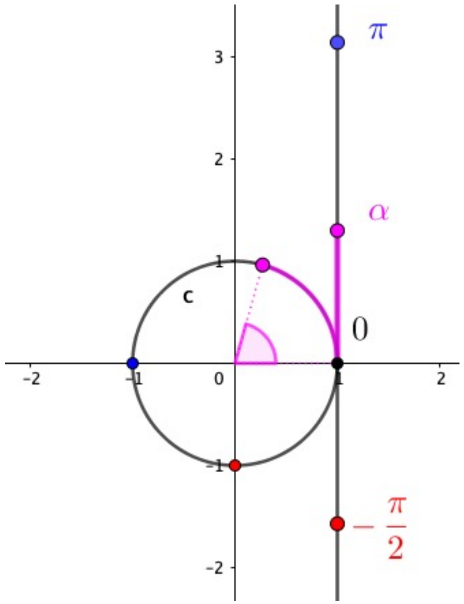
Regrouper et/ou développer quand c'est possible

$$2^x + 3^x, \quad \sqrt{a}+\sqrt{a}, \quad \frac{x^2}{4r^2}, \quad a^5 \times a^4, \quad 2^bt^bt^4, \quad \sqrt{3}\sqrt{x}x^3, \quad \frac{3^x}{5^x+7^x}$$

$$\sqrt{7x^4}, \quad (3x+2)^2, \quad x^2+z^2, \quad \sqrt{x}\times\sqrt{2x}, \quad x^{4+x},$$

2 Cosinus, Sinus et Tangente

Le plan est muni d'un repère orthonormédirect $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique. On trace la droite verticale d'abscisse 1, puis on enroule cette droite sur le cercle : la partie supérieure de la droite s'enroule en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, ce qu'on appelle sens direct ou trigonomètrique. La partie inférieure de la droite s'enroule en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, le sens indirect.
Par exemple, le point d'ordonnée π se retrouve sur le point (-1,0), le point d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ se retrouve en dessous, au point (0,-1). Un point du cercle correspond à plusieurs valeurs sur la droite, séparées par des intervalles de 2π.



Soit un point situé sur la droite à l'ordonnée α (positive). Quand la droite s'enroule sur le cercle, ce point se retrouve à l'endroit du cercle où l'arc correspondant a la longueur α. L'angle au centre a alors une mesure de α radians.

Le radian est l'unité de mesure des angles utilisée en mathématiques. La mesure en radian est proportionnelle à la mesure en degré, en sachant que $360° = 2\pi$ radians pour les angles situés dans la partie supérieures du cercle. Pour la partie inférieure, la mesure en radian est négative.

Exercice 13

Compléter le tableau suivant donnant les correspondances d'angle radian/degré :

Degre	0	360	180			30	45		1
Radian	0	2π		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$			1	

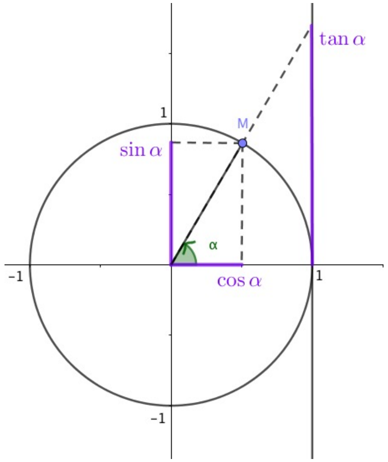
Définition 1.

On considère le cercle trigonométrique.

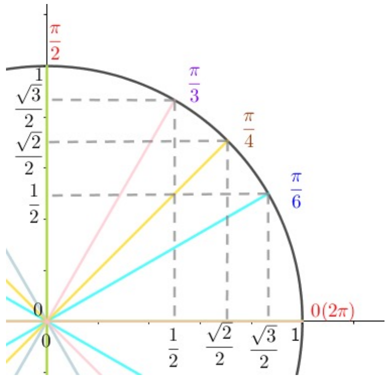
Pour tout réel α, le point M de $\mathcal{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$, a pour coordonnées $\boxed{(\cos\alpha, \sin\alpha)}$.

Leur quotient est la tangente :

$$\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$



Les principales valeurs d'angles, sinus et cosinus à savoir sont les suivantes



2.1 Propriétés

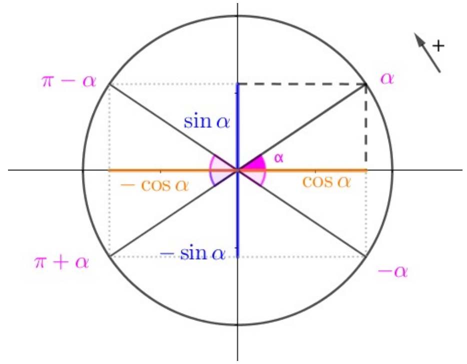
$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x), \quad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

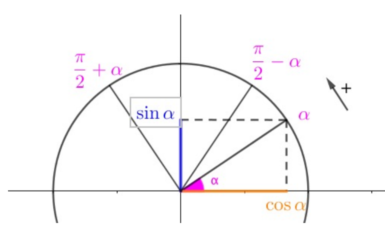
Réciproquement, si a, b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.

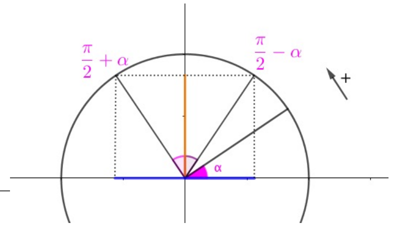
Un grand nombre de formules et résultats concernant les fonctions trigonométriques peuvent se retrouver en traçant et observant les angles dans un cercle trigonométrique.

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x), \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x), \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x).$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)},$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}.$$





2.2 Les formules à savoir !

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a, \qquad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Exercice 14

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
2. Déterminer la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2.3 Il faut savoir qu'elles existent pour les retrouver au besoin

Sous réserve d'existence des tangentes, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Ces formules se retrouvent grâce à $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$,.... en factorisant le quotient dans la tangente.

Pour $x \neq \pi[2\pi]$, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On obtient les formules de l'angle moitié

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

2.4 Résolution d'équations trigonométriques

a) L'équation $\cos(x) = a$ d'inconnue réelle x

Si $a \notin [-1;1]$, l'équation $\cos(x) = a$ n'a pas de solution. Si $a \in [-1;1]$, alors c'est bien un cosinus. On commence par chercher un angle θ connu tel que $\cos\theta = a$, soit en reconnaissant une valeur sur le cercle trigonométrique, soit en posant $\theta = \text{Arccos}(a)$. Alors l'équation devient

$$\cos(x) = \cos\theta \Leftrightarrow$$

$$x = \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad x = -\theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) L'équation $\sin(x) = b$ d'inconnue réelle x

Si $b \notin [-1;1]$, l'équation $\sin(x) = b$ n'a pas de solution. Si $b \in [-1;1]$, On cherche un angle θ connu tel que $\sin\theta = b$, soit en reconnaissant une valeur du cercle trigonométrique, soit en posant $\theta = \text{Arcsin}(b)$. Alors l'équation devient

$$\sin(x) = \sin\theta \Leftrightarrow$$

$$x = \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad x = \pi - \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(\pi/3 - 4x) = \sin(3x)$.

c) Le système $\left\{\begin{array}{l} \cos x = a \\ \sin x = b \end{array}\right.$ d'inconnue réelle x

Le système ne possède pas de solution si $a^2 + b^2 \neq 1$. Si la condition $a^2 + b^2 = 1$ est vérifiée, on cherche un angle θ sur le cercle trigonométrique tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$.

$\rightarrow$ Si on ne trouve pas une valeur standard, on a $\theta = \arccos(a)$ ou $-\arccos(a)$. Ensuite on choisit le signe qui correspond à b.

$$\left\{\begin{array}{l} \cos x = \cos(\theta) \\ \sin x = \sin(\theta) \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $x = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, ce système possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

d) L'équation $\tan(x) = c$ d'inconnue réelle x

On pose un angle θ connu tel que $\tan(\theta) = c$, soit en reconnaissant une valeur dans le cercle trigonométrique, soit en posant $\theta = \text{Arctan}(c)$. Alors l'équation devient

$$\tan x = \tan\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \theta + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Exemple. Résoudre l'équation $\tan(x - \pi/3) = 1$ en commençant par déterminer son ensemble de définition.

e) L'équation $A\cos(x) + B\sin(x) = C$ d'inconnue réelle x où A et B sont non nuls

Pour résoudre ce type d'équation, on commence par la transformer $A\cos(x) + B\sin(x)$ en une expression de la forme $r\cos(x - \varphi)$, et ainsi on est ramené au premier cas. (On peut également la transformer en une équation du type $r\sin(x + \psi)$)

Technique. On factorise l'expression par $r = \sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$:

$$A\cos(x) + B\sin(x) = r\left(\frac{A}{r}\cos(x) + \frac{B}{r}\sin(x)\right) = r(\heartsuit\cos(x) + \spadesuit\sin(x))$$

il existe un nombre réel φ tel que $\cos(\varphi) = \heartsuit$ et $\sin(\varphi) = \spadesuit$
(car $\heartsuit^2 + \spadesuit^2 = 1$), ce qui donne

$$A\cos(x) + B\sin(x) = r(\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) = r\cos(x - \varphi).$$

Exemple. Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 1

On considère deux expressions définies pour tout x réels :

$$E_1 = x^3 - 1; \quad E_2 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Développer E_2. Que peut-on conclure sur E_1 et E_2 ?

Exercice 2

Mettre au même dénominateur

$$\frac{5}{3} - \frac{7}{4}; \quad \frac{5}{12} + \frac{5x}{21}; \quad \frac{5}{2x} - \frac{3}{14x^2}; \quad \frac{2}{2x-3} + \frac{3}{1-x}$$

Exercice 3

Développer les expressions suivantes et les écrire de manière ordonnée

$$(2x+6)^2; \quad (3x-5)^2; \quad (5x-3)(5x+3); \quad (x+2)(x^2-1)$$

$$(2x+1)(4-x); \quad 2x(x+3) - 3(2x-1); \quad (x+3)^2 - 2(x-2);$$

$$x(x+1)(x-2); \quad (2x-1)(x+3)(x+1); \quad (2y-1)^2(y+2)$$

$$(3(2t-1))^2$$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes en utilisant un facteur commun

$$2x(x-1) + 3x; \quad (x+1)(x+2) + 5(x+2); \quad 3x^2 + 9x;$$

$$x^2 - 6x; \quad x^2(x+4) - 2x(x+4); \quad (x-3)^2 - 2(x-3)(2x-1)$$

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable

$$x^2 + 2x + 1; \quad (2x-5)^2 - x^2; \quad 9x^2 + 12x + 4$$

$$(2x-1)^2 - (x-3)^2; \qquad 4x^2 + 4 - 8x \qquad 16x^2 - 81$$

Exercice 6

Factoriser les expressions suivantes (deux étapes)

$$x^2 - 4 + (x-2)(x+1); \quad 3x^2 - 12x + 12; \quad x^2 + 3x + (x+3)^2$$

$$(x+1)(x+2) - (3x+6); \quad 2x(x+3) + 4x + 12; \quad -x^2 + 8x - 16$$

Exercice 7

Quand c'est possible, simplifier ou transformer les quantités suivantes :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}; \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}; \quad \sqrt{6} - \sqrt{3} \times \sqrt{7}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}; \quad \sqrt{15}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}; \quad \sqrt{75}; \quad \sqrt{2} + \sqrt{6}; \quad \sqrt{5} - \sqrt{45}$$

$$\sqrt{2x} + \sqrt{3x}; \quad \sqrt{6x} \times \sqrt{21x}; \quad \sqrt{\frac{9x}{20}}.$$

Exercice 8

Ecrire le réel suivant sous la forme $a\sqrt{3}$ avec a un entier relatif : $\sqrt{27} + \sqrt{75}$

Exercice 9

Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{2x}, \qquad \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2x}$$

Exercice 10

Donner les valeurs des cosinus et sinus suivants :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right); \quad \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right); \quad \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right);$$

$$\cos(-\pi); \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right); \quad \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right); \quad \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right);$$

Exercice 11

Par observation sur le cercle trigonométrique trouver la ou les valeurs de x telles que :

1. $x \in [0, 2\pi]$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$
2. $x \in [-\pi, \pi]$ et $\cos x = -\frac{1}{2}$
3. $x \in [0, \pi]$ et $\sin x = \frac{1}{2}$

Exercice 12

Montrer que pour tout x réel, on a

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$$

Exercice 13

($\star\star$) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3},\quad 2\sin(\frac{x}{3})=-1,\quad \cos(3x)=\frac{1}{2}, \sin(2x-\frac{\pi}{5})=\sin(3x)$$

$$\sqrt{2}\cos(x)+\sqrt{6}\sin(x)=4,\quad \cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2},\quad \sin(2x)=\cos(3x)$$

Exercice 14

($\star\star$) Résoudre les équations trigonométriques d'inconnues x suivantes sur l'intervalle précisé :

$$\cos(x)=\sqrt{3}/2 \text{ sur } \mathbb{R},\quad \cos(x)=-\sqrt{2}/2 \text{ sur } [3\pi,6\pi]$$

$$\sin(x)=\sqrt{3}/2 \text{ sur } [-4\pi,-3\pi],\quad \tan(x)=\sqrt{3}/3 \text{ sur } [\pi,5\pi/2]$$

Exercice 15

($\star$) Soit x un nombre réel. Ecrire l'expression $2\sqrt{3}\cos(x)-2\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x+\phi)$, puis sous la forme $r\sin(x+\psi)$.

Exercice 16

($\star\star$)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2\sin(x)\cos(x)+\sqrt{3}\cos(2x)=\sqrt{2}$
2. Résoudre sur $[0,2\pi]$ l'inéquation $\cos(2x)+3\cos(x)\leqslant -2$