27. Compléments d'intégration

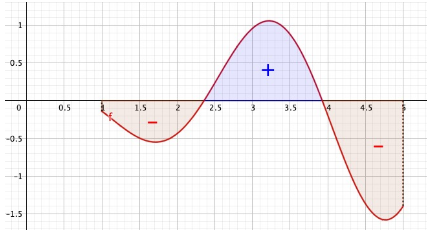
1. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Dans tout le cours, on suppose toujours que $a \leqslant b$ lorsqu'on parle du segment $[a, b]$. Comme dans le chapitre méthodes de calcul de primitives et d'intégrales, on admet que toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.

1.1. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a \leqslant b$). On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ le nombre réel noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et défini par $\displaystyle\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

$\displaystyle\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe (Ox), la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, en affectant d'un signe $+$ les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et d'un signe $-$ les parties situées en dessous.



Lien avec la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriété.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b appartenant à I, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a \geqslant b. \end{cases}$$

Remarque : Si $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas l'intégrale de f sur un segment. Dans toute la suite, on va impérativement supposer que $a < b$. Si $a > b$, il faudra utiliser $\displaystyle -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ à la place de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1.2. Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, c]$, tout réel λ, et pour tout réels $a \leqslant b \leqslant c$ on a

$$\int_a^b (\lambda f + g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Propriété 4.

(positivité de l'intégrale) Si f est une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$, alors son intégrale sur $[a, b]$ est positive, autrement dit,

$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

Démonstration. On note F une primitive de f sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La fonction F est continue et dérivable sur $[a, b]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}, \text{ donc } f(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Donc
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (b-a)f(c)$$
Puisque f est positive sur $[a,b]$ et puisque $b-a \geqslant 0$, on a $(b-a)f(c) \geqslant 0$ et ainsi $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Corollaire 5.

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $f \leqslant g$, alors on a

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

2.1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition.

On appelle subdivision de $[a, b]$ toute famille finie $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ strictement croissante d'éléments de $[a, b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Exemple. $\left(1; 2; \frac{5}{2}; 3, 2; 4\right)$ est une subdivision de $[1, 4]$.

Remarque : Si $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[a, b]$, alors on a $[a, b] = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} [x_{i-1}, x_i]$.

Définition.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$. On dit que f est continue par morceaux si, et seulement si, il existe une subdivision $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que f soit continue sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et prolongeable par continuité sur chacun des intervalles fermés $[x_{i-1}, x_i]$. Une telle subdivision est dite adaptée à la fonction f.

Début

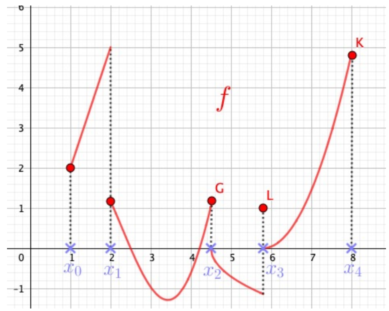
Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer



Remarque : Une fonction continue est un cas particulier de fonction continue par morceaux.

Propriété.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et λ un réel, alors $\lambda f + g$ et fg sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

2.2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition.

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note f_i le prolongement par continuité de f sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,x_1]} f_1 + \int_{[x_1,x_2]} f_2 + \cdots + \int_{[x_{n-1},b]} f_n.$$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Exemple. Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\in[0,1[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\in[1,2] \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux sur $[0;2]$ et l'on a

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 + \int_1^2 \Big[\ln(x)\Big]_1^2 \\ &= \frac{4}{3}+\ln(2)\end{aligned}$$

Remarque : Les propriétés de linéarité, positivité et croissance de l'intégrale sont conservées lorsque la fonction à intégrer est continue par morceaux. La notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est définie de la même façon que précédemment pour une fonction continue par morceaux et la relation de Chasles reste valable.
Attention : Certains résultats valables pour l'intégrale des fonctions continues ne sont plus vérifiés dès que la fonction à intégrer est seulement continue par morceaux !

Théorème 10.

Soit f une fonction continue positive sur un segment $[a,b]$.

L'intégrale de f sur $[a,b]$ est nulle si, et seulement si, f est nulle sur $[a,b]$.

Remarque : Par contre, une fonction positive et continue par morceaux sur $[a,b]$ peut être d'intégrale nulle sans être nulle sur tout le segment $[a,b]$.

3. Inégalités classiques

3.1. Valeur moyenne, inégalité de la moyenne

On suppose que a et b sont deux réels tels que $a < b$. Il faut bien noter que la plupart des résultats de la suite du cours sont faux si l'on ne fait pas cette supposition.

Définition 11.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. On appelle valeur moyenne de f le nombre réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque : La valeur moyenne μ de f est égale à la valeur de la fonction constante sur $[a, b]$ qui a la même intégrale que f sur $[a, b]$. Autrement dit, c'est la longueur du côté du rectangle dont l'autre côté est $[a, b]$ et qui a même aire que l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété 12.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et M un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$. On a

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M \cdot \int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x$$

et en particulier, en choisissant pour g la fonction constante égale à 1, on obtient

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M \cdot (b-a). \qquad \text{(Inégalité de la moyenne)}$$

Exercice 2

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. Il existe M une constante telle que

$$\forall x \in [0,1], |f(x)| \leqslant M$$

Soit g définie par

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Jusitfier que $\forall x \in [0,1]$, $|g(x)| \leqslant Mx$

3.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 13.
(inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$. On a

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

Démonstration. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(\lambda) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2\mathrm{d}x = \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

P est une fonction polynômiale en λ de degré inférieur ou égal à 2 et telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0$ (car on integre $(f + g)^2 \geqslant 0$).

1. Si $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = 0$, alors P est une fonction affine qui est toujours positive. Donc P est une fonction constante et l'on a $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. On obtient donc

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 = 0 = \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

2. Si $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \neq 0$, alors P est un trinôme du second degré qui reste positif sur $\mathbb{R}$ donc son discriminant

$$\Delta = 4\left(\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\right)$$

est négatif ou nul. L'inégalité de Cauchy-Schwarz en découle immédiatement.

4. Sommes de Riemann

Définition.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et n un entier strictement positif. Si l'on partage le segment $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$, on appelle somme de Riemann correspondant à cette subdivision la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Remarque : On peut trouver des variantes avec $\sum_{k=0}^{n}$ ou $\sum_{k=0}^{n-1}$.

Propriété 15.

Si on prend $a = 0$ et $b = 1$, la somme de Riemann d'une fonction f s'écrit simplement

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Le tout étant de bien choisir $f(x)$.

Théorème 16.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a, b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$, autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Grâce aux sommes de Riemann, il est possible de calculer des valeurs approchées d'intégrales mais cette méthode n'est pas très performante (en terme de rapidité de convergence). Cependant, les sommes de Riemann sont utiles pour trouver la limite de certaines suites.

Application. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.

5. Intégrales impropres

Dans quelle situation ?

— La fonction f peut poser problème en une borne finie de l'intervalle d'intégration. On considère a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$). Si f possède une limite finie en b (resp. en a), on peut prolonger f par continuité sur $[a, b]$. En notant $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$, on a alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple.
Mais il peut arriver que $\lim_{t\to b} f(t)$ ou $\lim_{t\to a} f(t)$ n'existe pas ou est infinie !

Exemples. Peut-on définir $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ alors que la fonction inverse tend vers $+\infty$ en 0^+ ? Peut-on définir $\int_0^{\pi/2} \cos(1/t)dt$ alors que la fonction $to \to \cos(1/t)$ n'a pas de limite en 0 ?

— L'intervalle d'intégration n'est pas borné. On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

Exemple. Peut-on définir $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$? Peut-on définir $\int_0^{+\infty} tdt$?

Définition 17.

Soit f une application continue sur $[a,b[$ (où $b>a$, éventuellement $b=+\infty$). On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers b. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Si la limite de $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers b n'est pas finie ou n'existe pas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 18.

Soit f une application continue sur $]a,b]$ (où $a<b$, éventuellement $a=-\infty$). On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Si la limite de $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers a n'est pas finie ou n'existe pas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

Définition 19.

Soit f une application continue sur $]a,b[$ (où $a<b$, éventuellement $a=-\infty$ et/ou $b=+\infty$). Soit $c\in]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Propriété 20.

(intégrales de Riemann) Soit α un réel.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\cdot}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha<1$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_{\cdot}^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

Propriété 21.

Plus généralement, soient a et α des réels.

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{\cdot}\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha<1$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_{\cdot}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Démonstration.

Application.

- Pour $f(t) = \frac{1}{t}$ $(\alpha = 1)$: $\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ divergent toute les deux.
- Pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$ $(\alpha = 2)$: $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.
- Pour $f(t) = t$ $(\alpha = -1)$: $\int_0^1 t\mathrm{d}t$ converge et $\int_1^\infty t\mathrm{d}t$ diverge.
- Pour $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ $(\alpha = 1/2)$: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge et $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ diverge.

Autres exemples :

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$ est divergente.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout réel $\alpha < 0$ et divergente pour tout réel $\alpha \geqslant 0$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est divergente pour tout réel $\leqslant< 0$ et convergente pour tout réel $\alpha > 0$.

Théorème 22.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$) et λ un réel.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

5.2. Intégrales des fonctions positives

Dans ce paragraphe, on considère a et b réels ou $\pm\infty$.

Théorème 23.

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$). On suppose que pour tout $t \in [a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$), on a $f(t) \leqslant g(t)$, alors :

1. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est convergente, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi.
2. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Remarque : Si l'intervalle d'intégration est $[a,b[$ et que l'éventuel « problème » se situe en b, les résultats du théorème précédent restent valables si pour un certain $c \in [a,b[$, on a $\forall t \in [c,b[,\ \ f(t) \leqslant g(t)$, c'est-à-dire si cette majoration est valable au voisinage de b. (La comparaison $f(t) \leqslant g(t)$ sur tout l'intervalle d'intégration $[a,b[$ n'est pas toujours possible.)

Exemples.

— étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

— étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{t} + \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$.

Théorème 24.

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) telles que $f \underset{b}{\sim} g$ (resp. $f \underset{a}{\sim} g$). Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, c'est-à-dire :

— l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge.

— l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Exemples. étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice 3

étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1/\pi}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Théorème 25.

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) telles que $f = \underset{b}{o}(g)$ (resp. $f = \underset{a}{o}(g)$).

Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge

Exemple. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$.

Définition 26.

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$). On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans ce cas, on dit que f est intégrable sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$).

Remarque :

1. Les fonctions positives dont l'intégrale sur I converge sont donc intégrables.
2. Pour les fonctions qui changent de signe, il faut rajouter la valeur absolue et ça peut tout changer !

Théorème 27.

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$). Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors cette intégrale est convergente.

Autrement dit : si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Utilité On prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ à l'aide des théorèmes utilisant la comparaison des fonctions positives (puisque $|f| \geqslant 0$). On en déduit la

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple. étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exemple. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. On veut étudier la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. On doit couper l'intégrale en deux, par exemple en $\frac{\pi}{2}$

1. La fonction f est continue et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ est absolument convergente. f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On admet que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge, donc l'intégrale n'est pas absolument convergente. Donc f n'est pas intégrable sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.
3. Au final, f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ n'est pas absolument convergente.

Par contre, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$

Propriété.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'intervalle I est de la forme $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b]$, les extrémités ouvertes de l'intervalle pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Linéarité Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et λ un nombre réel. Si f et g sont intégrables sur I, alors $f+\lambda g$ est intégrable sur I et l'on a
$$\int_I (f+\lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g.$$
2. Relation de Chasles Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur deux intervalles I et J. Si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, alors f est intégrable sur $I \cup J$ et :
$$\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f.$$
3. Soit f une fonction intégrable sur I. On a
$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Début

Précédent

Suivant

Table

Plein écran

Fermer

Théorème.

(Changement de variable) Soit f une fonction intégrable sur un intervalle J et $\varphi : I \to J$ une bijection d'un intervalle I sur J, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. En notant a, b les extrémités de I et a_1 et b_1 les limites de φ en a et b respectivement, on a :

$$\int_{a_1}^{b_1} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

Remarque :

1. En bref, on peut faire des changements de variables même dans le cas d'intégrales impropres.
2. Pour l'intégration par parties, il faut s'assurer que tous les termes de la formules existent pour pouvoir l'utiliser.

5.4. Etude de la nature d'une intégrale

On veut étudier $\int_a^b f(x)dx$ avec f définie sur $[a, b[$ (non défini en b), b pouvant être un réel ou un infini. Voici tous les cas qui peuvent se produire :

1. Si f est convergente quand $x \to b$ et si b est un réel. On dit que f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$, donc l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente
2. Si f est convergente quand $x \to b$ et si b est un infini. Il faut comparer $|f|$ à une fonction g du cours (exp, ln ou $\frac{1}{t^\alpha}$) avec $\leqslant, \sim, o$. On sait que $\int_a^b g$ converge (ou diverge) et on en déduit que $\int_a^b |f|$ converge (ou diverge), puis que $\int_a^b f$ converge (mais on ne peut rien dire sur la divergence !).
3. Si f tend vers ∞ quand $x \to b$ et si b est un réel. il faut comparer $|f|$ à une fonction g du cours, etc.

4. Si f tend vers $+\infty$ quand $x \to b$ et si b est un infini. On peut dire que $f \geqslant 1$ à partir d'un certain x, et on sait que $\int_a^\infty 1$ est divergente. Donc $\int_a^\infty f$ est divergente. Idem si f tend vers $-\infty$ en changeant les signes.
5. Si la limite de $f(x)$ pour $x \to b$ n'existe pas, Il faut comparer $|f|$ à une fonction g du cours, etc.

Si ces méthodes ne marchent pas, on se ramène à $\int_a^x f$ avec $x < b$, qu'on essaye de calculer. Puis on fait $x \to b$ et on étudie si la limite est finie ou pas.
Dans les exercices, il va falloir être soigneux sur la rédaction pour bien différencier ce qui concerne la fonction f et ce qui concerne l'intégrale de la fonction f. En particulier :
une fonction convergente ne donne pas toujours une intégrale convergente.
Une fonction divergente ne donne pas toujours une intégrale divergente.

6. TD 27 Compléments sur l'intégration

Exercice 1

($\star\star$) Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_1^{\cos x} e^{t^2} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

($\star\star$) Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\cos(x)/2}^{\sin(x)/2} \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 3

($\star$) Calculer la valeur moyenne sur $[1,3]$ de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

($\star\star\star$) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

si, et seulement si, f est de signe constant sur $[a,b]$. (On pourra considérer le cas où $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est positif puis celui où il est négatif).

Exercice 5

($\star\star$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant c^n$ où $c \in [0;1[$ est une constante à déterminer. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

($\star\star\star$) Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence d'un nombre réel M qui majore $|f|$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|g(x)| \leqslant Mx$, puis $|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{2^n}$.
4. Qu'en déduit-on sur f et g ?

Exercice 7

($\star\star$) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ (on pourra encadrer la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$).

Exercice 8

($\star\star$) Calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad u_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \quad u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots + \sqrt[n]{2^n}\right) \quad u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

Exercice 9

($\star\star$) Soit f une fonction dérivable strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t - xf(x).$$

Justifier que G est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire une égalité. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 10

($\star$) L'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{4} dx$ est-elle convergente ?

Exercice 11

($\star$) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{3}{4x^2+x-1} dx$ est-elle convergente ?

Exercice 12

($\star\star$) Calculer la limite pour k entier tendant vers $+\infty$ des deux intégrales $\int_0^{2k\pi} \cos x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \cos x dx$. Que peut-on en déduire sur $\int_0^{+\infty} \cos x dx$?

Exercice 13

($\star\star$) Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\mathrm{e}^x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+x^2\,\mathrm{e}^{-x}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 14

($\star\star$) Montrer que les intégrales impropres suivantes sont convergentes et calculer leur valeur :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} ax\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad (\text{en posant } t=\frac{1}{x})$$

Exercice 15

($\star\star$) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Commentez.

Exercice 16

($\star\star\star$) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)$ existe. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Table des matières