26. Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, les nombres (scalaires) considérés seront des réels principalement. Mais il est aussi possible de travailler avec des complexes.
On a vu précédemment qu'on pouvait additionner des objets qui ne sont pas des nombres : des vecteurs et des matrices. On peut aussi additionner des fonctions, des polynômes..... Plutôt que d'étudier les propriétés de l'addition pour chaque type d'objet qu'on veut additionner, on va chercher un vocabulaire et des propriétés qui marcheront dans tous les cas. On va donc étudier un cadre complètement théorique, qui pourra s'adapter ensuite à toutes les situations pratiques.

1. Structure d'espace vectoriel

1.1. Définition

Définition.

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$-*espace vectoriel* un ensemble E non vide muni de deux lois (des opérations) :

— une loi de composition interne, appelée addition de l'espace vectoriel E : $+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$

— une loi de composition externe appelée produit par un scalaire et notée $\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda,v) & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array}$

possédant les propriétés $(EV1)$ à $(EV8)$ décrites plus loin.

Les éléments de E sont appelés les vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ les scalaires. On pourra noter $\lambda v = \lambda \cdot v$ mais l'ordre doit être impérativement respecté.

Les propriétés $(EV1)$ à $(EV8)$ sont les suivantes :

(EV1) la loi $+$ est associative :

$$\forall u,v,w \in E,\ (u+v)+w = u+(v+w).$$

(EV2) la loi $+$ possède un élément neutre noté 0_E (ou 0) :

$$\exists 0_E \in E,\ \forall v \in E,\ v+0_E = 0_E+v = v.$$

(EV3) tout élément de E est symétrisable :

$$\forall u \in E,\ \exists u' \in E,\ u+u' = 0_E.$$

Le symétrique de u sera noté $-u$ et appelé l'opposé de u.

(EV4) la loi + est commutative :

$$\forall u, v \in E,\ u + v = v + u.$$

c'est-à-dire : $(E, +)$ est un groupe commutatif.

(EV5) distributivité par rapport à la somme des scalaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v.$$

(EV6) distributivité par rapport à la somme des vecteurs :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall u, v \in E,\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

(EV7) associativité mixte :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E,\ (\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v).$$

(EV8) l'élément unité 1 de $\mathbb{R}$ est élément neutre pour le produit par un scalaire :

$$\forall v \in E,\ 1 \cdot v = v.$$

Exercice 1

On considère $E =]0, +\infty[$ que l'on munit d'une loi d'addition $\oplus$ définie par

$$\forall a, b \in E, \qquad a \oplus b = ab$$

La loi $\oplus$ vérifie-t-elle $(EV1)$ et $(EV2)$?

1.2. Exemples fondamentaux

Ces exemples d'espaces vectoriels sont à connaître, on les utilisera souvent.

1. Les ensembles $\mathbb{R}^n$ déjà étudié précédemment sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels. En particulier, l'ensemble des vecteurs du plan et l'ensemble des vecteurs de l'espace forment deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathcal{F}(D)$ l'ensemble des fonctions définies sur un sous ensemble D de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tous $f, g \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note respectivement $(f+g)$ et (λf) les fonctions définies $\forall x \in D$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. $(\mathcal{F}(D), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.
3. $\mathbb{C}$ muni de l'addition des complexes et de la multiplication par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. L'ensemble $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition classique des polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un scalaire, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

1.3. Premières propriétés

A partir des 8 propriétés de bases, on peut en déduire des propriétés de calculs supplémentaires :

Propriété.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On a

1. $\forall u \in E,\ 0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_E$ (multiplication par le nombre 0)
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot 0_E = 0_E$ (multiplication par le vecteur nul)
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ \alpha \cdot u = 0_E \implies \alpha = 0_{\mathbb{R}}$ ou $u = 0_E$ (règle du produit nul)
4. $\forall u \in E,\ (-1) \cdot u = -u$ (opposé d'un vecteur)
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ (\alpha - \beta) \cdot u = \alpha \cdot u - \beta \cdot u$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in E,\ \alpha \cdot (u - v) = \alpha \cdot u - \alpha \cdot v$

Définition 3.

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ tout vecteur u qui peut s'écrire

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \qquad \text{où} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Exemples.

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, on considère la famille $(e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}, 1)$. Les combinaisons linéaires de cette famille sont $ae^{2i\pi/3} + be^{-2i\pi/3} + c$ avec a, b, c réels.
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on peut considérer la famille $(X + 1, X^2, X^3)$. Les combinaisons linéaires de cette famille sont les polynômes s'écrivant $a(X + 1) + bX^2 + cX^3$ avec a, b, c réels. Le polynômes $2X^3 + 3X + 3$ est bien sous cette forme. Par contre $X - 4$ n'est pas combinaison linéaire de cette famille.
3. Dans l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan, on pose $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 1)$. Les combinaisons linéaires de ces vecteurs sont les vecteurs $a\vec{u} + b\vec{v}$ de coordonnées$(b, a + b)$ avec a, b réels.

2. Sous-espaces vectoriels

Dans cette partie, $(E, +, .)$ représente un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.1. Définition et caractérisation

Définition 4.

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie :

1. $0_E \in F$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in F, \ \lambda u + v \in F$. (stabilité par addition et multiplication par une constante)

Dans ce cas, $(F, +, \cdot)$ est aussi un espace vectoriel.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Remarque :

1. Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, on montre presque toujours en utilisant ce théorème que c'est un sous-espace vectoriel d'un plus « gros » espace vectoriel connu. C'est la façon la plus rapide de montrer qu'on est en présence d'un espace vectoriel sans revenir aux 8 points de la définition.
2. Tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E. Une façon de prouver qu'une partie F de E n'est pas un s.e.v. de E est donc de montrer que $0_E \notin F$.
3. Un sous-espace vectoriel F est stable par addition et multiplication par une constante. C'est à dire que quand on effectue des calculs avec les vecteurs de F, on ne sort jamais de F. En particulier, toute combinaison linéaire de vecteurs de F donne un vecteur de F.

Exemples.

1. E et $\{0_E\}$ sont des s.e.v. de l'espace vectoriel E appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.
2. $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R} = \{iy, \ y \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$.

3. Une droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des vecteurs du plan.
4. L'ensemble $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace-vectoriel.
6. Les sous-espace vectoriels des cours précédents sur $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels (au sens général). Par exemple L'ensemble $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$.
7. Par contre $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ car

2.2. Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Définition 5.

Soit $u_1,u_2,\ldots,u_n$ des vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de E qu'on appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1\ldots,u_n$ et qu'on note $\mathrm{Vect}(\{u_1,\ldots,u_n\})$: on a

$$\mathrm{Vect}(\{u_1,\ldots,u_n\}) = \Big\{u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n,\ \text{avec}\ \ \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Exemples.

1. Si a est un élément non nul de E alors $\mathrm{Vect}(\{a\}) = \{\lambda a, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est également noté $\mathbb{R}a$ et on l'appelle droite vectorielle engendrée par a.
2. Si a et b sont deux éléments non nuls et non colinéaires de E alors $\mathrm{Vect}(\{a,b\}) = \{\lambda a + \mu b, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ est appelé le plan vectoriel engendré par a et b.

3. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$,

$$\mathrm{Vect}(\{1\}) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Vect}(\{i\}) = i\mathbb{R}, \quad \mathrm{Vect}(\{1, -1\}) = \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(\{1, i\}) = \mathbb{C}.$$

4. Les Vect vu dans $\mathbb{R}^n$ sont des exemples de Vect au sens général.
5. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ s'écrit comme un Vect, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $P = 3X^2$ et $Q = 4X^3$. Donner la forme générale d'un polynôme appartenant à $\mathrm{Vect}(P, Q)$.

2.3. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 6.

Si F et G sont deux s.e.v. de E, alors leur intersection $F \cap G = \{v \in E \,|\, v \in F \text{ et } v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : Attention, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel. Par exemple, $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. En effet $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ n'est pas stable pas addition, par exemple $(1 + i) \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ alors que 1 et i appartiennent à $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

2.4. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 7.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $F + G = \{u + v,\ u \in F,\ v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E qu'on appelle la somme des sous-espaces vectoriels F et G.

Autrement dit, $F+G$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition 8.

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si tout vecteur de E peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème 9.

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si, et seulement si,

$$F + G = E \qquad \text{et} \qquad F \cap G = \{0_E\}.$$

Dans ce cas, on note $E = F \oplus G$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions réelles paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions réelles impaires.
Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

3. Applications linéaires

3.1. Définition

Définition 10.

Soit E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire (ou morphisme d'espaces vectoriels) si, et seulement si,
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque : Si f est une application linéaire de E dans F, on a en particulier
$$f(0_E) = 0_F \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ f(-x) = -f(x).$$

Exercice 3

Montrer que l'application f suivante est linéaire :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Définition 11.

- On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- On appelle forme linéaire de E une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Les applications linéaires de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont des applications linéaires au sens de ce cours.
2. La dérivation $D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}). \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:
3. Pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & ax + by \end{array}$$

   est une forme linéaire.
4. Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. L'application $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est une application linéaire. C'est l'application identité de E.

Théorème 12.
L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E, F)$. En particulier, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

3.2. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 13.

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle noyau de f l'ensemble des antécédents de 0_F dans E. On le note

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

On appelle image de f l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent par f. On le note

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in F,\ \exists x \in E, f(x) = y\} = f(E).$$

Remarque : La rédaction pour trouver un noyau ou une image n'a pas changé :

— **Noyau** : Soit x un élément quelconque de E. On a : $x \in \operatorname{Ker}(f)$ si, et seulement si, $f(x) = 0_F$. Et on résout.

— **Image** : Soit y un élément quelconque de F. On a $y \in \operatorname{Im}(f)$ si, et seulement si, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Et on cherche **les conditions sur** y pour pouvoir résoudre.

Théorème 14.

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1. $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque : Le noyau et l'image d'une application linéaire contiennent le vecteur nul.

Exemple. Montrer que l'application $U : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'' \end{array}$ est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 4

Déterminer le noyau et l'image de

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

3.3. Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives

Définition 15.

Soit $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.
On appelle isomorphisme de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F.

On appelle automorphisme de E tout endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire toute application linéaire bijective de E dans E).

Propriété 16.

Soit $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.
3. f est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f = F$.

3.4. Composition des applications linéaires

Théorème 17.

Soit E, F et G trois $\mathbb{R}-$espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. L'application $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Théorème 18.

Soit E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels. La bijection réciproque f^{-1} d'un isomorphisme f de E dans F est un isomorphisme de F dans E. Autrement dit, l'application réciproque f^{-1} de l'isomorphisme f est non seulement bijective, mais c'est aussi une application linéaire de F vers E.

---

f^{-1} la bijection réciproque de f vérifie $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in F$ et $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Remarque : On se souvient que $y = f(x) \Leftrightarrow x : f^{-1}(y)$.

4. Quelques applications linéaires particulières

4.1. L'homothétie vectorielle

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}-$ espace-vectoriel et soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle homothétie vectorielle de rapport k l'application

$$h_k : \begin{array}{ccc} E & \to & E. \\ x & \mapsto & kx \end{array}$$

4.2. Les projecteurs

Définition 19.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle projection sur F parallèlement à G l'application

$$p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & p(x) = x_F \end{array}.$$

On dit également que p est un projecteur.

Propriété 20.

La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E, qui vérifie

$$\mathrm{Im}(p) = F, \qquad \mathrm{Ker}(p) = G \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F,\ p(x) = x.$$

Remarque : Tout projecteur p vérifie $p \circ p = p$ (on dit qu'il est idempotent).

4.3. Symétries

Définition 21.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application

$$s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & s(x) = x_F - x_G \end{array}$$

Remarque : La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est un automorphisme de E et s est sa propre réciproque.

5. Équations linéaires

Définition 22.

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On appelle équation linéaire toute équation de la forme :

$$u(x) = b. \qquad (1)$$

où u est une application linéaire de E dans F et b un élément de F appelé second membre. L'ensemble des solutions de l'équation (1) est l'ensemble des antécédents de b par l'application u.
On appelle équation homogène associée (ou sans second membre) associée à (1) l'équation linéaire :

$$u(x) = 0. \qquad (2)$$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est $\mathrm{Ker}(u)$, le noyau de u.

Remarque : Les équations linéaires généralisent les systèmes d'équations $AX = B$ et $AX = O$ (homogène).

Exemple. L'équation différentielle $y'' + xy' - y = \sin(x)$ est linéaire : E et F sont l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, u est l'application linéaire $f \mapsto f'' + xf' - f$ et le second membre est la fonction sinus. L'équation homogène associée est l'équation différentielle : $y'' + xy' - y = 0$.

Théorème 23.

Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriel et $u : E \to F$ une application linéaire.

On note S l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$ (1).

— Si $b \notin \mathrm{Im}(u)$, alors $S = \varnothing$.

— Si $b \in \mathrm{Im}(u)$, alors $S = \left\{x_0 + x,\ x \in \mathrm{Ker}(u)\right\}$ où x_0 est une solution particulière de (1).

6. TD 26 Espaces vectoriels

Exercice 1

($\star\star\star$) On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+$ et $\boldsymbol{.}$ définies par

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y)+(x',y') = (y+y', x+x')$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \boldsymbol{.} (x,y) = (\lambda x, y)$$

Les propriétés (EV1) et (EV5) des espaces vectoriels sont-elles vérifiées pour ces lois ?

Exercice 2

($\star\star$)

1. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. On pose F l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que la fonction $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ appartient à F. Donner un exemple de fonction qui n'est pas dans F.
   (b) Justifier que la fonction nulle est dans F.
   (c) On considère $\lambda = -2$. La fonction λf appartient-elle à F ?
   (d) F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $[0, 1]$. On pose F l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, 1]$ telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
   (a) Les fonctions $g(x) = x - \frac{1}{2}$ et $h(x) = x^2$ appartiennent-elles à F ?
   (b) Justifier que la fonction nulle est dans F.
   (c) On considère $\lambda \in \mathbb{R}$, deux fonctions u et v dans F. Justifier que $\lambda u + v$ est dans F.
   (d) F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3

($\star\star$) Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble donné est un sous-espace vectoriel de E, où E est un espace vectoriel à préciser.

1. F l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = 0$.
2. F l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$.
3. $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ 2P = XP' + X^2P''\}$.

Exercice 4

($\star\star$) On considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\left(\{\sin^2, \cos^2, \cos, \sin\}\right)$ de l'espace vectoriel de fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les fonctions suivantes appartiennent-elles à F ?

$$f : t \mapsto 1, \quad g : t \mapsto \cos(2t), \quad h : t \mapsto \tan(t) \quad \text{et} \quad k : t \mapsto \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 5

($\star\star$) Soit $P_0(X) = X + 1$, $P_1(X) = X^2 + X$ et $P_2(X) = 2X^2 + 1$. Montrer que $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6

($\star$) Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère F l'ensemble des polynômes dont le terme de degré 2 est nul et G l'ensembles des polynômes dont le terme constant est nul.

1. Donner la forme général d'un polynôme de F. F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Mêmes questions pour G.
3. Déterminer la forme général d'un polynôme de $F \cap G$, $F \cap G$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 7

($\star\star$) Dans $E = \mathbb{R}_1[X]$, on considère $F = \text{Vect}\, X$ et $G = \text{Vect}\, 1$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 8

($\star\star$) Soit F le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1, 1, 0); (0, 1, -1)\}$, et G la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\{(1, 1, 1)\}$. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9

($\star\star$) Ces applications sont-elles des applications linéaires entre $\mathbb{R}-$espaces vectoriels ?

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Re}(z) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(3) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ (a,b) & \longmapsto & aX^3 + bX \end{array}$$

Pour les celles qui sont des applications linéaires, déterminer leur noyau et leur image et dites si elles sont injectives, surjectives et/ou bijectives.

Exercice 10

($\star$) Soit $U : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 3P \end{array}$. Montrer que U est une application linéaire bijective et déterminer U^{-1}.

Exercice 11

($\star\star$) Soit $P = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ et D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $u = (2,0,1)$.

1. Montrer que D et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une expression analytique du projecteur sur D parallèlement à P, puis de la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

Table des matières