24. Fonctions réelles : Compléments

Dans ce cours, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ de la forme I ou $I\backslash\{a\}$ où I est un intervalle qui n'est pas un singleton et a un point de I. Si $D = I$, on appellera bords de D les extrémités (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de l'intervalle I. Si $D = I\backslash\{a\}$, où I est un intervalle d'extrémités b et c, les bords de D sont a, b et c (éléments de $\overline{\mathbb{R}}$).

Définition.

On dit que f possède une propriété au voisinage de a si f possède cette propriété sur $V \cap D$ où V est

- un intervalle ouvert contenant a si $a \in \mathbb{R}$
- un intervalle de la forme $]c; +\infty[$ si $a = +\infty$
- $]-\infty; c[$ si $a = -\infty$ (où $c \in \mathbb{R}$).

On parle de propriété locale de la fonction f, ou propriété valable localement. En particulier, les limites, la continuité et la dérivation sont des propriétés locales.

1. Limite

Définition.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en a (ou admet pour limite ℓ en a) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que f a une limite finie.

Exemple. La fonction racine carrée tend vers 0 en 0. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, si on prend $V = [0, \varepsilon^2[$, alors pour tout $x \in V$, $\left(|\sqrt{x} - 0| \leqslant \varepsilon\right)$.

Définition.

On dit que f tend vers $+\infty$ en a ssi pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage V de a tel que,

$$\forall x \in V, \qquad f(x) \geqslant A$$

On dit que f tend vers $-\infty$ en a ssi pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage V de a tel que,

$$\forall x \in V, \qquad f(x) \leqslant A$$

Propriété 4.

(Unicité de la limite) Si une fonction f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors cette limite ℓ est unique.

2. Continuité

2.1. Continuité en un point

Définition 5.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite ne peut être que $f(a)$. Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

Exemple.

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1 puisque $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1}$.
- La fonction partie entière n'est pas continue en $m \in \mathbb{Z}$ puisqu'elle n'admet pas de limite finie en un tel point (les limites à gauche et à droite sont différentes).

Définition 6.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ une extrémité de D. Si f n'est pas définie en a et si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

s'appelle le prolongement par continuité en a de f. C'est l'unique fonction continue en a qui coïncide avec f sur D. Par abus, on la note souvent encore f (c'est-à-dire que l'on confond f et $\widetilde{f}$).

Exemples. Montrer que la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \sin(1/x) \end{array}$ se prolonge par continuité en 0.

Exercice 1

Montrer que la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x(x^3+1)}{x+1} \end{array}$$

se prolonge par continuité en -1. (Indice : Faire la division euclidienne de $x^3 + 1$ par $x + 1$.

Définition.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. On dit que la fonction f est :

— continue à gauche en a si et seulement si f possède une limite à gauche en a et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

— continue à droite en a si et seulement si f possède une limite à droite en a et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Remarque : Attention à ne pas confondre la notion de continuité à gauche ou à droite, et la notion de limite à gauche ou à droite. Une fonction continue à droite en a admet par définition une limite à droite en a. Par contre, une fonction qui admet une limite à droite en a qui est différente de $f(a)$ n'est pas continue à droite en a.

Exemple. La fonction partie entière est continue à droite en tout point $m \in \mathbb{Z}$ mais n'est pas continue à gauche en ce point.

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. La fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left(x - \lfloor x \rfloor\right)^2$. Montrer que f est continue en tout point $m \in \mathbb{Z}$.

2.2. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition 9.

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. On dit que f est continue sur D si, et seulement si, f est continue en tout point de D. On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur D.

La continuité sur D se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de f peut être dessinée « sans lever le crayon » sur chaque intervalle de D.

Exemple.

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $m \in \mathbb{Z}^{-*}$, la fonction $x \mapsto x^m$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- sin, cos et exp sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ peut être prolongée par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$). La fonction obtenue est alors continue sur $\mathbb{R}^+$.

2.3. Opérations et continuités

Théorème.

Soient $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ deux fonctions continues sur D, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
1lors $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues sur D.
Si g ne s'annule pas sur D, alors f/g est continue sur D.
En particulier, $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Propriété.

Soit $f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(D_g, \mathbb{R})$ deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$. Si la fonction f est continue sur D_f et si la fonction g est continue sur $f(D_f)$, alors $g \circ f$ est continue sur D_f.

Exemple.

Exercice 2

Justifier que la fonction

$$f(x) = \ln(x-2) + 2x.e^x$$

est continue sur $]2, +\infty[$.

3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.1. Lemme des valeurs intermédiaires

Lemme 12.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (c'est-à-dire tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Il existe alors un élément c de I compris entre a et b vérifiant $f(c) = 0$.

Démonstration. Supposons $a < b$, $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$ (les autres cas se traitent de façon similaire).

Procédé de dichotomie la dichotomie est une méthode pour trouver explicitement un tel nombre c en divisant l'intervalle en deux un grand nombre de fois.

On part de l'intervalle $[a, b]$. On divise cet intervalle en son milieu ce qui donne deux nouveaux intervalles à savoir $[a, (a+b)/2]$ et $[(a+b)/2, b]$. S'il existe un nombre c tel que $f(c) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ alors un tel nombre se trouve nécessairement dans

au moins un de ces deux intervalles. Prenons celui où il y a un point c. On recommence l'opération de division avec ce nouvel intervalle, on obtient alors deux intervalles dont l'un d'eux contient un nombre c tel que $f(c) = 0$. Et on recommence ainsi de suite. On obtient une suite d'intervalles emboîtés, de longueur tendant vers 0, qui contiennent tous un point c convenable.

Etape 1 : Construction des intervalles. Plutôt que de manipuler des intervalles, nous allons considérer les extrémités de ces intervalles : on définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) d'éléments de $[a, b]$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(c_n) \geqslant 0 \\ c_n & \text{si } f(c_n) < 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(c_n) \geqslant 0 \\ b_n & \text{si } f(c_n) < 0 \end{cases} \qquad c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ et plus précisément, le réel c_n est le milieu de $[a_n, b_n]$.
Toujours par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$. *Remarque : ces deux résultats, bien qu'évidents, ne se montrent proprement qu'à l'aide d'une récurrence.*

Etape 2. Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

• Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = c_n - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0 & \text{si } f(c_n) < 0 \\ a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0 & \text{si } f(c_n) \geqslant 0 \end{cases}$
donc dans tous les cas, $a_n \leqslant a_{n+1}$ ce qui prouve la croissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De même on montre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
• Montrons que la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Suivant le signe de $f(c_n)$, la différence $b_{n+1} - a_{n+1}$ vaut $c_n - a_n$ ou $b_n - c_n$. Dans les deux cas, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$. La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et converge donc vers 0. Plus précisément, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Ces trois points montrent que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite notée c. Puisque les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans $[a, b]$, on a $c \in [a, b]$.

Etape 3. Il reste à montrer que $f(c) = 0$. Comme f est continue, les suites $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(c)$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) \geqslant 0$, on a $f(c) \geqslant 0$ (par passage à la limite) et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant 0$, on a $f(c) \leqslant 0$.
Finalement on obtient $f(c) = 0$.

Définition 13.

Soit f une fonction définie sur D. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur D. Ce sont les points d'intersections de f avec la première bissectrice.

Exemple. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.

3.2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 14.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I avec $a \leqslant b$.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration. Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et posons pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x) - y$.

Les deux réels $g(a) = f(a) - y$ et $g(b) = f(b) - y$ sont de signes contraires car y est entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le lemme précédent, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire $f(c) - y = 0$, donc $f(c) = y$.

Exercice 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+2}$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer $f(0)$ et $f(2)$. Que peut-on en déduire sur l'équation $f(x) = 1$?

ATTENTION Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel c tel que $f(c) = y$ mais en aucun cas l'unicité de c. Pour l'unicité, il faut une hypothèse supplémentaire.

Corollaire 15.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I avec $a < b$.
Si f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

3.3. Intervalles

Propriété.

L'image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Définition 17.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Une fonction réelle f définie sur I admet un maximum local en $a \in I$ si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(a)$.
- Si l'inégalité est valable sur I, le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum (global) de f sur I et noté $\max\limits_{I}(f)$, ce nombre est le plus grand élément de l'ensemble $f(I)$.
- Une fonction réelle f définie sur I admet un minimum local en $a \in I$ si et seulement si il existe un voisinage V tel que $\forall x \in V, f(x) \geqslant f(a)$.
- Si l'inégalité est valable sur I, le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum (global) de f sur I et noté $\min\limits_{I}(f)$, ce nombre est le plus petit élément de l'ensemble $f(I)$.

Théorème 18.

(Image d'un segment par une fonction continue) Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.
Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors il existe deux points c_1 et c_2 appartenant à $[a, b]$ tels que $f(c_1) = \min\limits_{[a,b]}(f)$ et $f(c_2) = \max\limits_{[a,b]}(f)$ et l'image $f([a, b])$ du segment $[a, b]$ par f est le segment $\big[f(c_1), f(c_2)\big]$.
En particulier, f est alors bornée sur le segment $[a, b]$.

4. Fonctions dérivables

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I et a un élément de I.

4.1. Dérivabilité en un point

Définition.

La fonction f est dite dérivable en a si, et seulement si, la fonction τ_a, appelée *taux d'accroissement* de f en a et définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a. Cette limite est appelé nombre dérivé de f en a, et notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. Autrement dit, si la limite existe, on a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \alpha x + \beta$. Montrer que f est dérivable en $x = 1$

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. En $a = 0$, on a

$$\tau_0(x) = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui n'a pas de limite en 0. Donc f n'est pas dérivable en 0.

4.2. Dérivée à droite et à gauche en un point

Définition.

Si a n'est pas une extrémité de I, on dit que f est

— dérivable à droite en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à droite en a. Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé à droite de f en a et se note $f'_d(a)$. Autrement dit, on a

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

— dérivable à gauche en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à gauche en a. Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé à gauche de f en a et se note $f'_g(a)$. Autrement dit, on a

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Propriété.

Lorsque a n'est pas une extrémité de I, la fonction f est dérivable en a si, et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple. Soit la fonction $f(x) = |x|$, on étudie sa dérivabilité en 0.

— En 0^- (à gauche), on a pour tout $x \in]-0,5; 0[$:

$$\tau_0(x) = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1, \quad f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \tau_0(x) = -1$$

— En 0^+ (à droite), on a pour tout $x \in]0; 0,5[$:

$$\tau_0(x) = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1, \quad f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \tau_0(x) = 1$$

La valeur absolue n'est pas dérivable en 0 puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0) = -1$.

Exercice 5

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0.

Propriété.

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a. (Idem à gauche, Idem à droite)

ATTENTION Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a. Par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Il existe des fonctions qui sont continues en tout point de $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable.

4.3. Interprétation graphique

Le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe au point $A(a, f(a))$. On rappelle que l'équation de la tangente est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Si f a une dérivée à droite en a, alors la courbe de f a une demi-tangente de pente $f'_d(a)$, à droite au point $A(a, f(a))$. Si f a une dérivée à gauche en a, alors la courbe de f a une demi-tangente de pente $f'_g(a)$, à gauche au point $A(a, f(a))$.
Si $\lim\limits_{x \to a} \tau_a(x) = \infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a mais la courbe en possède une tangente verticale en a. De même, si $\lim\limits_{x \to a^-} \tau_a(x) = \infty$, alors la courbe en possède une demi-tangente verticale à gauche en a. Idem à droite avec $x \to a^+$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e - e^x & \text{si} \quad x > 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

On admet que f est continue en 1. Calculer l'équation des demi-tangentes à la courbe de f au point d'abscisses $x = 1$.

4.4. Fonction dérivée

Définition.

Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I et la fonction $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ est appelée fonction dérivée de f, et se note f', Df ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Propriété.

Si f est une fonction dérivable sur I alors elle est continue sur I.

4.5. Opérations sur les dérivées

Propriété 25.

Soit f et g définies deux fonctions définies sur I. Si f et g sont dérivables sur I, alors

1. $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2. fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
3. si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Propriété 26.

Soit f définie sur I et g définie sur J avec $f(I) \subset J$. Si f et g sont respectivement dérivables sur I et $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f'.(g' \circ f).$$

Théorème 27.

(Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (où $a < b$) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$.

— Si $f'(x)$ admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors f est dérivable en a et l'on a $f'(a) = \ell$. Dans ce cas, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

— Si $f'(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers a, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$) et f n'est pas dérivable en a. Le graphe de f admet en ce point une tangente verticale.

5. Dérivées successives

5.1. Définition

Définition 28.

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, sa dérivée f' peut elle-même être dérivable sur I. On appelle alors dérivée seconde de f la dérivée de f' et on la note f''. On dit alors que f est deux fois dérivable sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est n fois dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
Par convention, $f^{(0)}$ désigne la fonction f.
Autrement dit, les dérivées successives de f sont définies par récurrence par

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

La dérivée n-ième de f est aussi notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Définition 29.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et *si $f^{(n)}$ est continue sur I*. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

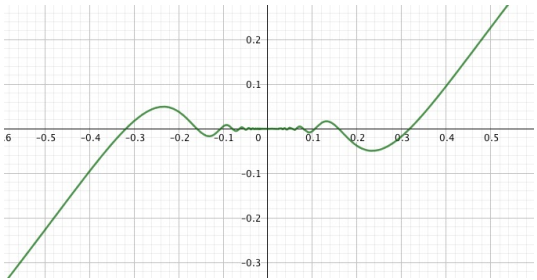
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f possède des dérivées de tous ordres sur I. Une telle fonction est dite indéfiniment dérivable. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque : Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I sur sont dites *continûment dérivables* sur I.

Exemple.

— Les polynômes, les fonctions cos, sin, exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

— Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$.



On a déjà vu que la fonction était continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5.2. Opérations

Propriété.

Soit f et g deux fonctions définies sur I de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et λ un réel. La fonction $\lambda f + g$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et l'on a

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ des fonctions définies sur I.

Remarque : L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ et donc toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est de

classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Théorème.

(Formule de Leibniz) Si f et g sont deux fonctions définies sur I de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors la fonction $f.g$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Remarque : Donc tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Propriété.

Soit f et g deux fonctions respectivement définies sur deux intervalles I et J et de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur ces intervalles, telles que $f(I) \subset J$. La fonction $g \circ f$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Propriété.

Soit f et g deux fonctions définies sur I, de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, g ne s'annulant pas sur I. La fonction $\dfrac{f}{g}$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

6. Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles

6.1. Extrema

Théorème 34.

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I et a un point de I qui n'en est pas une extrémité. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque :

1. Graphiquement, la tangente en un extremum est horizontale.
2. Ce théorème ne concerne que les fonctions dérivables. Par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ possède un minimum local en 0 et n'est pas dérivable en 0.
3. Ce théorème ne s'applique pas aux extrema locaux qui sont une extrémité du domaine de définition. Une extrémité peut être un extremum local sans que la dérivée ne s'y annule. Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x \end{array}$ admet un maximum local en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$.
4. Ce théorème n'admet pas de réciproque : si une fonction admet une dérivée nulle en un point a, elle n'admet pas nécessairement un extremum en ce point. Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule en 0 et 0 n'est pas un extremum local.

6.2. Théorème des accroissements finis

Théorème 35.

de Rolle Soit f une fonction réelle continue sur un segment $[a;b]$ (où $a < b$), et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

Si $f(b) = f(a)$ alors il existe un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$

Remarque : à ce point c, la tangente à la courbe est horizontale.
Et la version plus compliquée....

Théorème 36.

(égalité des accroissements finis) Soit f une fonction réelle continue sur un segment $[a;b]$ (où $a < b$), et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

Il existe un nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque : Graphiquement, ce théorème signifie que tout arc de la courbe représentative d'une fonction dérivable possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les extrémités de cet arc.

Théorème 37.

(Inégalité des accroissements finis) Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ (avec $a < b$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$. Si pour tout $t \in]a;b[$, on a $|f'(t)| \leqslant k$, alors pour tout

$$\forall x, y \in [a;b], \quad |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

Exercice 7

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [10000, 10001]$, justifier que $\sqrt{10001} \approx 100$ avec une erreur inférieure à 5×10^{-3}, c'est-à-dire

$$|\sqrt{10001} - 100| \leqslant 0,005$$

6.3. Applications du théorème des accroissements finis

Propriété.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points et si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Idem avec strictement négative et strictement décroissante.

Remarque : Il ne faut pas croire que la positivité stricte de f' en un point donné suffit à justifier la stricte monotonie de f au voisinage de ce point.
Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(0) = 1$ et pourtant f' n'est de signe constant dans aucun intervalle autour de 0.

7. TD 24 Complément sur les fonctions

Exercice 1

($\star\star$) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que la fonction f est bornée.
   (on distinguera deux cas : $x \geqslant 1$ et $0 < x < 1$)
2. Calculer, si elle existe, la limite de f à droite en 0.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la limite de f à gauche en n, puis à droite en n. Que peut-on en déduire sur la continuité de f en n ?

Exercice 2

($\star\star$) Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{array}$$

Exercice 3

($\star\star$) On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+\sin(x))^{1/\tan(x)}. \end{array}$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0.

Exercice 4

($\star\star$) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'existence d'un unique réel u_n appartenant à l'intervalle $I_n =]2n\pi\,;\,2n\pi + \pi/2[$ tel que $f(u_n) = 1$.

Exercice 5

($\star\star\star$) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, à valeurs réelles et p et q deux nombres réels positifs. Montrer que

$$\exists c \in [a;b], \quad p\,f(a) + q\,f(b) = (p+q)f(c).$$

Exercice 6

($\star\star$) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
Montrer que f possède un unique point fixe s dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Exercice 7

($\star\star$) Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{|x|}). \end{array}$

Exercice 8

($\star\star\star$) Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-1/|x|) \end{array}$$

se prolonge par continuité en 0, et qu'on obtient ainsi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

($\star\star$) Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur domaine de dérivabilité *a priori*.

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \qquad f_2 : x \mapsto x^x \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f_4 : x \mapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| \qquad f_5 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \qquad f_6 : x \mapsto \big(\cos(x)\big)^{\sin(x)}$$

Exercice 10

($\star\star$) On considère l'équation différentielle (E) : $\quad xy' + y = x(x+2)\,\mathrm{e}^x$.

1. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

($\star\star$) Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f_2(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f_4(x) = \sin(x) \qquad f_5(x) = x^3\sin(x) \qquad f_6(x) = x^k$$

Exercice 12

($\star\star\star$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction p_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} f_n^{(n)}.$$

1. Déterminer l'expression de p_0, p_1 et p_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre p_n et p_{n+1}.

Exercice 13

($\star\star\star$) Soit P un polynôme réel de degré n ayant n racines distinctes réelles. Montrer que P' a $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 14

($\star\star$) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\frac{1}{0,999^2} \approx 1; \qquad \cos(1) \approx \frac{1}{2}$$

Exercice 15

($\star\star\star$) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

en utilisant la fonction

$$\begin{array}{rccl} h: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)). \end{array}$$

Exercice 16

($\star\star$) Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$ par $f : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$.
On considère la suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si x appartient à $[\frac{3}{2},2]$, alors $f(x)$ appartient à $[\frac{3}{2},2]$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et a tous ses termes dans $[\frac{3}{2},2]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [\frac{3}{2},2]$, on a : $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.
4. Déterminer r l'unique point fixe de f dans $[\frac{3}{2},2]$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1}-r| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r|$.
6. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Conclusion ?
7. Déterminer n de sorte que u_n approche r à 10^{-3} près.

Table des matières