20. Diagonalisation

Dans tout le chapitre, E désigne $\mathbb{R}^n$ (ça pourra être un espace vectoriel de dimension finie dans des chapitres ultérieurs).

1. Objectifs

Le but du chapitre est de diagonaliser ou trigonaliser un endomorphisme.

Définition 1.

Soit u un endomorphisme de E (application linéaire de E dans E).
On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ soit diagonale.

On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure.

Définition 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est diagonalisable si et seulement il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On dit que A est trigonalisable si et seulement il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Il y a évidement un lien entre ces deux notions. Pour une matrice A, on peut poser u

l'endomorphisme canoniquement associé à A. Dans ce cas, la matrice P est la matrice de passage $P = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ de la base canonique $\mathcal{C}$ de à une base $\mathcal{B}$, telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale ($M_{\mathcal{B}}(u) = D$) ou triangulaire supérieure ($M_{\mathcal{B}}(u) = T$).

— Diagonaliser ou trigonaliser un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie, c'est-à-dire trouver une base dans laquelle la matrice de u est diagonale ou triangulaire supérieure.

— Diagonaliser ou trigonaliser une matrice A, c'est-à-dire trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale ou triangulaire supérieure.

A quoi cela sert ? Les calculs (élévation à la puissance n ...) sont beaucoup plus simples sur une matrice diagonale ou triangulaire que sur une matrice quelconque. On peut trouver des propriétés géométrique en reconnaissant certaines matrices diagonales particulières. On peut utiliser les matrices pour calculer le terme général de suites récurrentes. Nous verrons plus tard que la diagonalisation des matrices sert également (parmi d'autres applications) à résoudre des systèmes d'équations différentielles.

2. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 3.

Soit u un endomorphisme de E.

— Un vecteur x non nul de E est un vecteur propre de u si et seulement si son image par u lui est colinéaire, autrement dit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

— Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u si et seulement si il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Remarque :

1. Un vecteur propre est nécessairement non nul mais 0 peut être une valeur propre.
2. Un vecteur propre ne peut être associé qu'à une seule valeur propre.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'endomorphisme f défini par $f(x,y) = (4x - y, -2x + 5y)$. Calculer l'image du vecteur $(-1, 2)$ et du vecteur $(1, 1)$. En déduire que ce sont des vecteurs propres de f, à quelles valeurs propres sont-ils associés ?

2.1. Propriétes des vecteurs propres et des valeurs propres

Définition 4.

Soit u un endomorphisme de E.

— On note $\mathrm{Sp}(u)$ et l'on appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u.

— Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u, on pose

$$E_\lambda = \{x \in E \text{ tels que } u(x) = \lambda x\}$$

Ce sous-espace vectoriel de E est appelé le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ. Il est constitué des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.

Théorème.

Soit u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Le sous-espace propre E_λ est stable par u autrement dit

$$u(E_\lambda) \subset E_\lambda.$$

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda$. Si $x = 0$, on a facilement $u(x) = 0 \in E_\lambda$. Si $x \neq 0$, alors $u(x) = \lambda x \in E_\lambda$ car $x \in E_\lambda$. Donc $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$

Propriété.

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, montrons que toute famille de n vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes est libre.

— Une famille de 1 vecteurs propre est libre car il est non nul par définition.

— Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que la propriété soit vraie.
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $n+1$ vecteurs propres d'un endomorphisme u, associés aux valeurs propre $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ (distinctes).
Soient a_i des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad (\star)$$

On applique u à l'égalité et par linéarité, il vient :

$$a_{n+1}u(x_{n+1}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i u(x_i)$$

Or, on a par définition $u(x_i) = \lambda_i x_i$ pour tout $i \in [1, n+1]$, donc

$$\lambda_{n+1}(a_{n+1}x_{n+1}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i \quad (\star) \Rightarrow \quad \lambda_{n+1}\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i)x_i = 0$$

Or $x_1, \ldots, x_n$ est une famille de n vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes, donc elle est libre, donc $\forall i = 1 \ldots n$, on a $a_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0$. Les λ étant distincts, on a donc $a_i = 0, \forall i = 1 \ldots n$.

En reportant dans l'égalité de départ, on obtient $a_{n+1}x_{n+1} = 0$. Donc $a_{n+1} = 0$ car $x_{n+1} \neq 0$. Donc tous les a_i sont nuls et la famille est libre.

2.2. Exemples de recherche d'éléments propres

Exemple 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'homothétie de rapport α notée $h_\alpha : \begin{array}{ccc} E & \to & E. \\ x & \mapsto & \alpha x \end{array}$.

Déterminons ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exemple 2. Soit $p : E \to E$ la projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \ker(p)$. Déterminons ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 2

Soit $s : E \to E$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de s.

2.3. Le point de vue purement matriciel

Soient une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A (endomorphisme canoniquement associé à A). Les notions de valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres et spectre de A peuvent être défini comme étant ceux de u. Mais on peut aussi donner les mêmes définitions sans avoir besoin u.

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $(A - \lambda I_n)$ soit non inversible, donc tel que $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- On appelle spectre sur $\mathbb{K}$ de A l'ensemble de ses valeurs propres et on le note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (ou encore $\mathrm{Sp}(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbb{R}$).

Définition.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur colonne propre de A si X est non nul et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda X$. Dans ce cas, λ est une valeur propre de A et l'on dit que X est un vecteur colonne propre de A associé à la valeur propre λ.

— Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ noté E_λ, défini par

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \left\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X\right\}$$

Remarque :

1. λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme u.
2. X est un vecteur colonne propre de A si et seulement si le vecteur x, de coordonnées canoniques X, est un vecteur propre de u.

Remarque : A est inversible si et seulement si le nombre 0 n'est pas une valeur propre de A.

2.4. Polynôme caractéristique et valeur propre

Définition 9.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ de la variable λ est le polynôme caractéristique de la matrice A. Il est de degré n, de coefficient dominant est $(-1)^n$ et son coefficient constant vaut $\det(A)$.

Remarque : Le polynôme caractéristique P_A est de la forme

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A),$$

où $\operatorname{tr}(A)$ (la « trace » de A) désigne la somme des coefficients diagonaux de A.
Exemple pour $n = 2$:

Propriété 10.
Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration. Soit A et B deux matrices carrées semblable, alors il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. On a

$$A - \lambda I = PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1} = P(B - \lambda I)P^{-1}$$

donc

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(B - \lambda I)\det(P)^{-1}$$

$$= \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda)$$

Définition 11.
Si A et B sont deux matrices représentant le même endomorphisme u dans des bases différentes, alors A et B ont le même polynôme caractéristique. C'est ce même polynôme qu'on appelle polynôme caractéristique de u et que l'on note P_u. On a donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $P_u(\lambda) = P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

Remarque : Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée est aussi celui de l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé.

Théorème 12.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique P_A de A.

— Soit u un endomorphisme de E. Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme caractéristique P_u de u.

Corollaire 13.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes. Une matrice carrée de taille n a au plus n valeurs propres distinctes.

Démonstration. Dans un espace vectoriel de dimension n, Le polynôme caractéristique est de degré n. Donc il admet n racines distinctes au maximum, donc n valeurs propres au maximum.

Définition 14.

Soit u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u. On dit que λ est une valeur propre de u d'ordre de multiplicité m_λ si et seulement si λ est une racine d'ordre de multiplicité m_λ du polynôme caractéristique P_u de u.

Remarque : Idem pour une matrice A.

Exemple. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5. Sous-espace propre associé à une valeur propre

En déterminant les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, on obtient ses valeurs propres, c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des réels distincts.
Pour chaque valeur propre, on doit ensuite déterminer son espace propre, c'est à dire l'ensemble de ses vecteurs propres.

— Pour la valeur propre λ_1, on résout l'équation $u(x) = \lambda_1 x$. Les solutions de cette équation forment E_{λ_1}.
— Pour la valeur propre λ_2, on résout l'équation $u(x) = \lambda_2 x$. Les solutions de cette équation forment E_{λ_2}.
— etc.

Théorème 15.

Soit u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité m_λ. On note $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. On a :

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda.$$

Remarque :

1. Si λ est une valeur propre de u d'ordre de multiplicité 1, alors $\dim(E_\lambda) = 1$.
2. Même propriété pour les espaces propres d'une matrice.

Exercice 4

Soit l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres : 2 (multiplicité 2) et 4 (multiplicité 1).

3. Endomorphismes/matrices diagonalisables

3.1. Diagonalisation et vecteurs propres

Propriété 16.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. u est diagonalisable si et seulement il existe une base $\mathcal{B}'(b_1, b_2, \dots)$ de E formée de **vecteurs propres** de u.

Dans ce cas, Diagonaliser u signifie donner la base $\mathcal{B}'$ et écrire la matrice de u dans cette base :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

avec $\lambda_1; \lambda_2, \dots$ les valeurs propres de u associées aux vecteurs propres $b_1, b_2, \dots$.

Propriété 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Diagonaliser** la matrice A, (lorsque c'est possible), c'est écrire la relation

$$A = PDP^{-1}$$

avec $P = P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$ matrice de passage de la base canonique à une base de vecteur propre $\mathcal{B}'$ et $D = \text{ Diag } (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ matrice diagonale contenant $\lambda_1; \lambda_2, \dots$ les valeurs propres de A.

Remarque : Il suffit d'écrire la formule. On ne cherche pas à la calculer, puisque le cours vous dit qu'elle marche !

3.2. La condition de diagonalisation

Rappel : On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que toutes ses racines sont réelles.

Théorème 18.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension n. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement toutes ces conditions sont vérifiées :

1. son polynôme caractéristique P_u est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. La dimension de chaque sous-espace propre E_λ est égal à la multiplicité de la valeur propre λ qui lui est associée.

Autrement dit, on a

$$P_u(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

et

$$\dim(E_{\lambda_1}) = m_1, \dim(E_{\lambda_2}) = m_2, \cdots, \dim(E_{\lambda_p}) = m_p$$

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à n.

Remarque : Idem pour une matrice A.

Propriété 19.

Si un endomorphisme u de E est diagonalisable, on obtient une base de diagonalisation en réunissant les bases de chacun des sous-espaces propres.

Un cas particulier du théorème de diagonalisation est :

Propriété 20.

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Si le polynôme caractéristique P_u de u possède n racines distinctes, alors u est diagonalisable.

Dans ce cas, si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont n vecteurs propres respectivement associés aux n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes de u, alors la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de diagonalisation de u.

Exemple. On considère l'endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire si cet endomorphisme est diagonalisable, et diagonaliser l'endomorphisme dans ce cas.

Exercice 5

On considère l'endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dire si cet endomorphisme est diagonalisable, et diagonaliser l'endomorphisme dans ce cas.

4. Endomorphismes/Matrices Trigonalisables

Rappel Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Une matrice A de

taille n est dite trigonalisable si il existe P matrice inversible et T matrice triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

Théorème 21.

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel (ou une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_u est scindé dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel est donc trigonalisable, puisque sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé. Il n'est cependant pas nécessairement diagonalisable.

Propriété 22.

Si u est trigonalisable, la diagonale de la matrice de u dans une base trigonalisante ne contient que des valeurs propres.

Remarque : Idem pour une matrice.

Exemple. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? trigonalisable ? Trigonaliser u si c'est possible.

5. TD 20 Diagonalisation

Exercice 1

($\star$) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et $w = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ sont vecteurs propres de u.

Exercice 2

($\star\star\star$) Déterminer les réels $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & a \\ 1 & \beta & b \\ 1 & \gamma & c \end{pmatrix}$$

admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

Exercice 3

($\star\star$) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de u. Que peut-on en déduire quant à sa nature géométrique ?

Exercice 4

($\star\star$) Chercher les valeurs propres et diagonaliser si possible les endomorphismes dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

($\star\star\star$) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6

($\star\star$) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre. Dans ce cas, diagonaliser A et donner l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7

($\star\star$) Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u admet 1 pour seule valeur propre. Pourquoi u n'est-il pas diagonalisable ? u est-il trigonalisable ?
2. Déterminer un vecteur propre v_1 de u. Déterminer un vecteur v_2 tel que $u(v_2) = v_1 + v_2$ et tel que v_1 et v_2 soient linéairement indépendants, puis, un vecteur v_3 tel que $u(v_3) = v_2 + v_3$ et tel que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Quelle est la matrice A' de u dans cette base ? Écrire la relation reliant A et A'.

Exercice 8

($\star\star$) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f admet 1 pour unique valeur propre. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. Montrer que $\dim(E_1) = 1$ et déterminer un vecteur propre de f noté e_1.
3. Montrer que $\dim(\ker((f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2)) = 2$ puis que $e_1 \in \ker((f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2)$. Déterminer ensuite e_2 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker((f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2)$.
4. Montrer que $(e_1, e_2, \overrightarrow{i})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et montrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est triangulaire. Donner les relations de trigonalisation.

Exercice 9

($\star\star\star$) Dans un repère orthonormé, on considère la transformation représentée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres associés.
2. Donner la relation de diagonalisation.
3. En déduire une formule simple pour calculer A^k, puis calculer A^k (k entier naturel).
4. Calculer A^{-1}.

Table des matières