17. Nombres complexes et géométrie

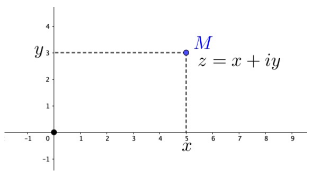
Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

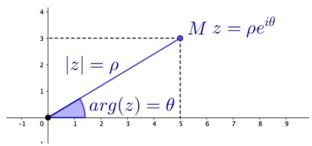
1. Vecteurs du plan et complexe

1.1. Formes algébriques et exponentielles

On considère le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.
Forme algébrique et coordonnées cartésiennes. Un point M de coordonnées (x, y) est associé au complexe $z = x + iy$, qu'on appelle affixe de M.

Exemple. Soit un droite $\mathcal{D}$ $y = ax + b$ avec a, b des réels. Tout point $M \in \mathcal{D}$ a pour coordonnées $(x, ax + b)$, donc pour affixe $z = x + i(ax + b)$.





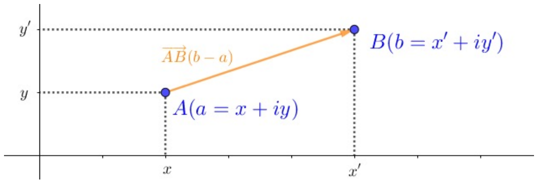
Forme exponentielles et coordonnées polaires

- Le module $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ correspond à la distance OM
- l'argument $\theta = arg(z)$ est une mesure de l'angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$ en radians. Pour déterminer θ, on a $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$.

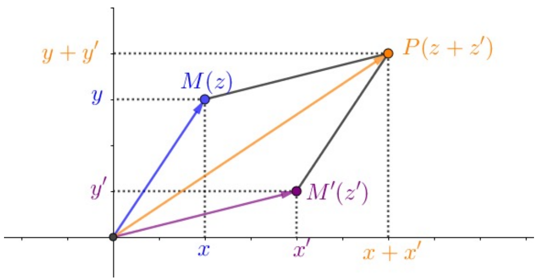
Propriété 1.

Si A et B sont deux points d'affixe respective a et b (des complexes), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

Le module $|b-a|$ correspond à la distance AB et l'argument $arg(b-a)$ est une mesure de l'angle $(Ox, \overrightarrow{AB})$ en radians.



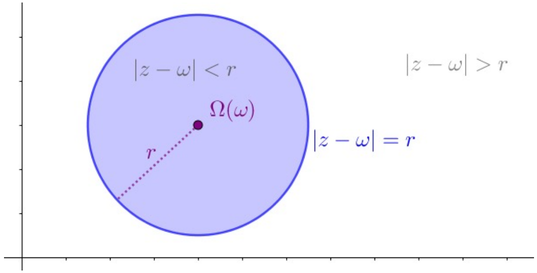
Somme de deux nombres complexes Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectifs $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$. On note P le point du plan tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Les coordonnées de P sont $(x+x', y+y')$ donc le point P et le vecteur $\overrightarrow{OP}$ ont pour affixe $z_P = z + z'$.



Cercle et disque en complexe Soit Ω un point d'affixe ω et $r > 0$. Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = r$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Le disque intérieur vérifie $|z-\omega| < r$ et l'extérieur du cercle vérifie $|z-\omega| > r$.



Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

1.2. Module et argument en géométrie

Propriété 2.

Soit A, B, C, D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d dans le plan complexe. On a l'équivalence suivante

$$\left(\frac{CD}{AB} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d-c}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

Démonstration. Les affixes des vecteurs sont $\overrightarrow{AB}$: $b-a$ et $\overrightarrow{CD}$: $d-c$.

— Pour les distances, on a

$$\frac{CD}{AB} = \frac{|d-c|}{|b-a|} = \left|\frac{d-c}{b-a}\right|$$

— Pour l'angle, on le décompose

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CD})$$

$$= -\arg(b-a) + \arg(d-c) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

Finalement

$$\frac{d-c}{b-a} = \left|\frac{d-c}{b-a}\right| \exp\left(i \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\right)$$

Cette proposition permet en particulier d'interpréter l'alignement et l'orthogonalité.

Corollaire 3.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si le quotient $\dfrac{b-c}{a-c}$ est un nombre réel.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si le quotient $\dfrac{b-a}{d-c}$ est imaginaire pur.

Démonstration.

1. D'après le résultat précédent, $\dfrac{b-c}{a-c}$ est un réel si et seulement si l'angle $\theta = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ vaut 0 ou π. C'est-à-dire : les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires. Les trois points sont bien alignés.
2. $\dfrac{b-a}{d-c}$ est un imaginaire pur si et seulement si l'angle $\theta = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$ vaut $\pm\pi/2$. C'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Exercice 1

On considère les points A, B, C de coordonnées respective $(2, -3)$, $(-1, 3)$ et $(1, -1)$. Donner les affixes a, b, c des points et montrer que A, B, C sont alignés.

2. Transformations du plan

Les transformations du plan sont des fonctions f bijectives qui transforment un point M du plan en un point $M' = f(M)$ du plan. Si on note z et z' les affixes de M et M', alors il ça définit une fonction complexe f bijective telle que $f(z) = z'$. (Techniquement, la fonction sur les points et la fonction sur les complexes ne sont pas les mêmes, donc on devrait les noter avec des lettres différentes).

2.1. Transformations courantes

Translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ La translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur $\overrightarrow{v}$ associe à tout point M du plan le point $M' = t_{\overrightarrow{v}}(M)$ défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}.$$

Une translation de vecteur non nul n'a aucun point invariant. En complexe, on note v l'affixe du vecteur $\vec{v}$ et la relation de translation devient $z' - z = v$, donc $z' = z + v$. La translation correspond à la fonction $t_{\overrightarrow{v}}(z) = z + v$.

Rotation de centre Ω et d'angle orienté θ La rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle orienté θ associe à tout point M du plan le point $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$ défini par

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta. \end{cases}$$

Une rotation d'angle non nul a un unique point invariant qui est le centre Ω de cette rotation. En complexe, on note ω l'affixe de Ω, et on a alors

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \quad \Leftrightarrow \quad z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega = e^{i\theta}z + \omega(1 - e^{i\theta})$$

Donc la fonction de rotation est $r_{\Omega,\theta}(z) = e^{i\theta}z + \omega(1 - e^{i\theta})$.

Exercice 2

Soit A point du plan de coordonnées $(1,1)$ calculer les coordonnées de A' image de A par :

1. La translation de vecteur $\vec{v}(2,-3)$.
2. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

Symétrie orthogonale (réflexion) d'axe Δ La symétrie S_Δ d'axe la droite Δ associe à tout point M du plan l'unique point $M' = S_\Delta(M)$ tel que la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$. Les points invariants par une symétrie orthogonale sont les points de l'axe Δ de cette symétrie.

Les translations, les rotations et les symétries sont des **isométries** du plan (conservation des distances) : pour tous points A et B du plan d'images respectives A' et B', on a $A'B' = AB$.

Homothétie de centre Ω et de rapport k : L'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport le réel k associe à tout point M du plan le point $M' = h_{\Omega,k}(M)$ défini par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Une homothétie de rapport $k \neq 1$ a un unique point invariant qui est le centre Ω de cette homothétie. En complexe, on note ω l'affixe de Ω et on a $z' - \omega = k(z-\omega)$, donc la fonction complexe est $h_{\Omega,k}(z) = kz + \omega(1-k)$.
Les homothéties de rapport k ne sont pas des isométries mais des similitudes de rapport $|k|$: pour tous points A et B du plan d'images respectives A' et B', on a $A'B' = |k|\,AB$.

Exercice 3

($\star$) Soit A point du plan de coordonnées $(1,1)$ calculer les coordonnées de A' image de A par l'homothétie de centre $\Omega(-1,0)$ et de rapport 3.

2.2. Les transformations $z \mapsto az + b$ du plan complexe

2.2.1. Un cas particulier : la transformation $z \mapsto az$ avec $a \neq 0$

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Théorème 4.
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On note f la transformation du plan complexe représentée par $f : z \mapsto f(z) = az$.
- Si a est réel, alors f est l'homothétie de centre O et de rapport a.
- Si $|a| = 1$, alors f est la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg(a)$.
- Dans les autres cas, f est la composée de l'homothétie de centre O, de rapport $|a|$, et de la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg(a)$.

Démonstration. Soit A un point du plan complexe, d'affixe z. On appelle A' le point du plan complexe d'affixe $z' = f(z) = az$. On rappelle que z (resp. z') est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OA'}$).
- Si a est réel. Alors
$$z' = az \quad \Leftrightarrow \quad (z' - 0) = a(z - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA}$$
Donc A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport a.
- Si $|a| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta}$. Donc
$$z' = e^{i\theta} z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z' - 0}{z - 0} = e^{i\theta} = 1e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{OA'}{OA} & = & 1 \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) & = & \theta \end{array} \right.$$
Donc A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg a$.
- Sinon, on écrit sous forme exponentielle $a = |a|e^{i\theta}$,
$$z' = |a|e^{i\theta} z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z' - 0}{z - 0} = |a|e^{i\theta} = \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{OA'}{OA} & = & |a| \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) & = & \theta \end{array} \right.$$
z' est l'image de z par la composition de la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg a$ et l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

2.2.2. Le cas général

Théorème 5.
La transformation $z \longmapsto az+b$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, définit une similitude directe f. On peut préciser que

1. f est une translation si, et seulement si, $a=1$.
2. f est une homothétie (ou une translation) si, et seulement si, $a \in \mathbb{R}$.
3. f est une rotation (ou une translation) si, et seulement si, $|a|=1$.
4. Sinon, c'est une composée d'homothétie et de rotation.

Technique. Déterminer la nature de la transformation f associée à $f : z \mapsto az+b$ avec $a \neq 0$:

Si $a=1$ et $b=0$, alors tous les points du plan sont fixes et f est l'application identité du plan.

Si $a=1$ et $b \neq 0$, alors la transformation f correspondant à $\varphi : z \mapsto z+b$ est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe b. Cette transformation ne possède aucun point fixe.

Supposons maintenant que $a \neq 1$ Il y a un point fixe Ω qui est le centre de la transformation. On détermine ce centre en résolvant l'équation $az+b=z$. On note ω la solution de cette équation. La transformation f admet pour centre le point Ω d'affixe ω, c'est le seul point fixe.

En soustrayant les égalités $\omega = a\omega + b$ et $f(z) = az+b$, on obtient :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) - \omega = a(z-\omega).$$

On a donc, pour tout $z \neq \omega$,

$$\frac{f(z)-\omega}{z-\omega} = a = |a| \, \mathrm{e}^{i \arg(a)} \, .$$

Si M et M' sont les points d'affixes z et $f(z)$, on obtient :

$$\begin{cases} \Omega M' = |a| \times \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg(a). \end{cases}$$

On en déduit que f est la composée de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $k = |a|$ et de la rotation r de même centre Ω et d'angle $\theta = \arg(a)$. On a donc $f = r \circ h = h \circ r$ car h et r commutent pour la loi $\circ$ (car elles ont même centre).

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 3e^{i\frac{\pi}{5}}z$. Décrire f géométriquement.

Remarque : Toute similitude plane directe f transforme :

1. deux droites parallèles en deux droites parallèles ;
2. un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r en le cercle de centre $f(A)$ et de rayon λr où λ est le rapport de la similitude f.
3. le barycentre d'un système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ en le barycentre du système $\{(f(A_1), \alpha_1), \dots, (f(A_n), \alpha_n)\}$.

2.3. Deux autres transformations

Définition 6.

La transformation φ définie par $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$ s'appelle l'inversion géométrique de centre O et de rapport 1. Elle conserve l'argument et inverse le module.

Si on pose $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, on a $\varphi(z) = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$. Le module est bien inversé et l'argument conservé.

Propriétés

Les points O, $M(z)$ et $M(\varphi(z))$ sont alignés pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

On calcule

$$\frac{\varphi(z)-0}{z-0} = \frac{\varphi(z)}{z} = \frac{1}{\bar{z}z} = \frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}$$

Donc les points O, $M(z)$ et $M(\varphi(z))$ sont bien alignés.

L'image d'une droite $\mathcal{D}$ passant par O (mais privée de O) est elle-même.

Si la droite n'est pas l'axe des ordonnées : $M \in \mathcal{D}$ a pour coordonnées (x, ax) avec a réel, donc un affixe $z = x + iax = x(1+ia)$. Donc M' a pour affixe

$$z' = \frac{1}{x(1-ia)} = \frac{1+ia}{x(1+a^2)} = \frac{1}{x(1+a^2)}(1+ia) = x'(1+ia)$$

donc M' est bien sur la droite $\mathcal{D}$. Quand x parcourt $\mathbb{R}^*$, x' parcourt $\mathbb{R}^*$ aussi, donc on parcourt toute la droite.

L'image d'une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O est un cercle.

Si la droite n'est pas verticale : $M \in \mathcal{D}$ a pour coordonnées $(x, ax+b)$ avec a, b réel, donc un affixe $z = x + i(ax+b)$. Donc M' a pour affixe

$$z' = \frac{1}{x - i(ax+b)} = \frac{x + i(ax+b)}{x^2 + (ax+b)^2} = x' + iy'$$

$$x' = \frac{x}{x^2+(ax+b)^2}, y' = \frac{(ax+b)}{x^2+(ax+b)^2}$$

Or

$$(x')^2+(y')^2+\frac{a}{b}x'-\frac{1}{b}y' = \frac{x^2+(ax+b)^2}{(x^2+(ax+b)^2)^2}+\frac{\frac{a}{b}x-\frac{ax+b}{b}}{x^2+(ax+b)^2}$$
$$= \frac{1}{x^2+(ax+b)^2}-\frac{1}{x^2+(ax+b)^2}=0$$

On met l'équation sous forme canonique :

$$\left(x'+\frac{a}{2b}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{a^2+1}{4b^2}$$

Donc on obtient bien un cercle.
On peut aussi démontrer que par une inversion géométrique :

- l'image d'un cercle passant par O (mais privé de O) est une droite ne passant pas par O,
- l'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.

Définition 7.

La transformation ψ définie par $\psi(z) = \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$ s'appelle l'inversion complexe. Elle change l'argument en son opposé et inverse le module.

Si on pose $z = r\,e^{i\theta}$, on a $\psi(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$. Le module est bien inversé et l'argument opposé.

3. TD 17 Géométrie et Complexes

Exercice 1

($\star\star$) Comment faut-il choisir le nombre complexe z pour que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés ?

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Exercice 2

($\star\star$) On note M le point d'affixe $z = x + iy$ dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $a = -2i$ et B le point d'affixe $b = 2$. Pour z différent de $-2i$, on pose $z' = \dfrac{z-2}{z+2i}$ et M' le point d'affixe z'.

1. Déterminer les réels x' et y' tels que $z' = x' + iy'$.
2. Déterminer l'ensemble E_1 des points M de $\mathcal{P}$ tels que $OM' = 1$.
3. Déterminer l'ensemble E_2 des points M de $\mathcal{P}$ tels que M' appartient à l'axe des ordonnées.
4. Déterminer l'ensemble E_3 des points M de $\mathcal{P}$ tels que z' est un réel positif.
5. Déterminer l'ensemble E_4 des points M de $\mathcal{P}$ tels que $OM' = \sqrt{2}$.

Exercice 3

($\star\star$) Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d. On considère les points M, N, P et Q tels que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (c'est-à-dire les angles $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$, $(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB})$, $(\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC})$ et $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$ sont de mesure positive) respectivement en M, N, P et Q. On note respectivement m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q.

1. Montrer que $m = \dfrac{a - ib}{1 - i}$.
2. Donner (sans calcul) les affixes n, p et q en fonction de a, b, c et d.
3. Montrer que $MP = NQ$ et que les droites (MP) et (NQ) sont orthogonales

Exercice 4

($\star\star$) Soit A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b et c.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur la valeur du quotient $\dfrac{c-a}{c-b}$ le triangle ABC est-il équilatéral ?
2. Montrer que sous cette condition, les valeurs possibles du quotient $\dfrac{c-a}{c-b}$ sont les deux racines du trinôme $X^2 - X + 1$.
3. En déduire que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, a, b, et c vérifient
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Exercice 5

($\star\star$) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, On considère le point $A(-1, 1)$ et la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 7 - 4i$

1. Déterminer l'image par f du point A.
2. Déterminer le point fixe de la transformation f.
3. Décrire f géométriquement.

Exercice 6

($\star\star$) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$, différente de $2 - i$,associe le point M' d'affixe

$$z' = f(z) = \frac{1}{z - 2 + i}$$

1. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $z = x(-2 + i)$. Déterminer $\mathcal{L}$ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe z' lorsque z parcourt $\mathcal{D}$ pour $x \neq -1$. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ sur une figure.
2. Déterminer la forme algébrique de z' image de z par f. On notera X la partie réelle de z' et Y sa partie imaginaire.
3. Calculer $X^2 + Y^2$.
4. On note $\mathcal{C}(R)$ le cercle de centre O et de rayon R. Déterminer $\mathcal{Q}(R)$ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe z lorsque z' parcourt $\mathcal{C}(R)$. Tracer $\mathcal{C}(R)$ et $\mathcal{Q}(R)$ sur la figure pour $R = 2$.

Exercice 7

($\star\star$) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ dont l'unité graphique est 4 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b, c telles que $a = 1 - i$, $b = 1 + i$ et $c = -a = -1 + i$. On note Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

1. (a) Placer sur la figure les points A, B, C et le cercle Γ.
   (b) Mettre les nombres complexes a, b, c sous forme exponentielle.
   (c) Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$. Déterminer l'angle de r et le point $r(B)$, image de B par r.
   (d) Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par r et placer Γ' sur la figure.
2. Considérons un nombre réel $\theta \in \left]0; 2\pi\right[$ distinct de π. On note M le point d'affixe $z = 1 + i\,\mathrm{e}^{i\theta}$. On désigne par M' l'image de M par r et on appelle z' l'affixe de M'.
   (a) Montrer que M est un point de Γ distinct de A et B.
   (b) Exprimer z' en fonction de z. Calculer, en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
   (c) Établir la relation $u = u' \tan(\theta/2)$.
   (d) Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur la figure un point M et son transformé M'

Exercice 8

($\star\star$) Soit K, L, M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$, $z_L = 1 - i$ et $z_M = -i\sqrt{3}$.

1. (a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Calculer l'affixe z_N du point N.

   (b) La rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C. Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.

   (c) La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.

2. (a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

   (b) Calculer $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$.

   (c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Table des matières