16. Équations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition 1.

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable sur I si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Dans ce cas, on a $f' = (\mathrm{Re}(f))' + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im(f)})'$.

Exemple. $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \ln(t) + \mathrm{i}\cos(t) \end{array}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $\forall t \in]0,+\infty[,\ f'(t) = \dfrac{1}{t} - \mathrm{i}\sin(\mathrm{t})$.

Propriété 2.

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{at} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = a\,\mathrm{e}^{at}$.

Les règles usuelles de dérivation (somme, produit...) sont valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Principe de résolution d'une équation différentielle linéaire :

0. On observe l'équation pour identifier l'ordre (la plus grande dérivée) et éventuellement, on met l'équation en forme.
1. On détermine les solutions y_h homogène associée.
2. On "devine" la forme d'une solution particulière de (E) qu'on note y_p. On reporte y_p dans l'équation (E) afin de la déterminer complètement.
3. On additionne $y = y_h + y_p$
4. On utilise éventuellement les conditions initiales pour déterminer les constantes.

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1. Définitions

Définition 3. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sur I toute équation du type :

$$(E): \qquad \forall t \in I, \quad \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t),$$

où $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues sur I et $y : I \to \mathbb{K}$ est une fonction inconnue dérivable sur l'intervalle I.

On appelle solution de (E) sur I toute fonction f de I dans $\mathbb{K}$, dérivable sur I et telle que :

$$\forall t \in I, \quad \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t).$$

Le graphe d'une solution est appelée une courbe intégrale de (E).

Dans la pratique, on écrit (E) sans la variable de l'inconnue y :

$$(E): \qquad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t),$$

Exemple. (exo) Montrer que la fonction $f(t) = \frac{t^2}{2}e^t$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' - y = t\,\mathrm{e}^t$.

1.2. Résolution de l'équation en pratique

On veut résoudre l'équation $(E): \qquad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Avant toute chose, on se place sur un intervalle I où α ne s'annule pas. C'est l'intervalle de définition des fonctions.
On divise alors l'équation (E) par $\alpha(t)$, pour obtenir :

$$y' + a(t)y = b(t) \quad \text{avec } a(t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, b(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}, \quad \forall t \in I$$

1.3. Etape 1 : Equation homogène

Définition 4.

On appelle équation homogène associée à (E) (ou *équation sans second membre*) l'équation homogène, notée (E_h), définie par :

$$(E_h) : \qquad \forall t \in I, \quad y' + a(t)y = 0.$$

Remarque : Le mot homogène signifie que le second membre de l'équation est la fonction nulle $(= 0)$.

Propriété 5.

Soit a une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle homogène

$$(E_h) : \; y' + a(t)y = 0$$

sont **toutes les fonctions** y_h **de la forme** :

$$\forall t \in I, \; y_h(t) = \lambda \, \mathrm{e}^{-A(t)},$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante et A est une primitive de la fonction a sur I.

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{t}{t^2+1} y = 0$.

1.4. Etape 2 : Solution particulière de l'équation avec second membre

On revient à l'équation avec second membre : (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$.
Pour trouver y_p une solution particulière de (E), on doit deviner la forme de y_p. Puis on reporte dans l'équation (E), c'est-a-dire qu'on calcule $y_p' + a(t)y_p = b(t)$. On se sert de l'égalité pour déterminer complètement y_p.
Pour deviner la forme de y_p, il y a essentiellement trois méthodes : reconnaitre un cas du cours, faire la variation de la constante.... ou avoir du flair (mais ça, c'est avec la pratique que ça vient).

Cas faciles = lorsque **a** est une constante

On cherche y_p solution particulière qui ressemble à $b(t)$ le second membre.

Si $b(t) = P(t)$ est un polynôme, on cherche alors une solution particuliere y_p de (E) de la forme

$$\boxed{y_p(t) = R(t)}$$

où R est un polynôme inconnu de même degré que P. On détermine les coefficients de R en reportant y_p dans l'équation (E).

Si $b(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{mt}$, $m \in \mathbb{K}$ et P un polynôme. On cherche alors une solution particulière y_p sous la forme :

— $y_P(t) = R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ si $m \neq -a$ (quand l'exponentielle du second membre n'est pas la même que celle de la solution homogène)
— $y_P(t) = t \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ si $m = -a$ (quand l'exponentielle du second membre est la même que celle de la solution homogène !)

où R est un polynôme inconnu de même degré que P. On détermine les coefficients de R en reportant y_p dans l'équation (E).

Exemple. Déterminer une solution particulière y_p sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles

$$(E_1): \ y' - 2y = (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad (E_2): \ y' - 2y = t\,\mathrm{e}^{2t}$$

— Si $b(t) = P(t)\cos(mt)$ ou $b(t) = P(t)\sin(mt)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et P un polynôme à coefficients réels. On a deux méthodes : la méthode réelle ou la méthode complexe.

Méthode réelle On cherche une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_P(t) = q(t)\cos(mt) + s(t)\sin(mt)$ où q et s sont des polynômes de degré inférieur ou égal à celui de P. On détermine les coefficients de q, s en reportant dans (E)

Méthode complexe On pose une équation complexe (*une nouvelle équation ! valable comme aide de calcul pour la solution particulière uniquement*) en remplaçant le y par z et le $\sin(mt)$ ou le $\cos(mt)$ par e^{imt} :

$$(E_{\mathbb{C}}): \ z' + az = P(t)e^{imt}$$

On cherche une solution particulière z_p de cette équation (comme dans le cas précédent), sous la forme $z_p(t) = R(t)e^{imt}$ avec R un polynôme à coefficients complexes de même degré que P.

Quand on a trouvé z_p, on revient en réel :

— Si le second membre de l'équation réelle était en $\cos(mt)$, on pose $y_p = \mathrm{Re}(z_P)$.

— Si le second membre de l'équation réelle était en $\sin(mt)$, on pose $y_p = \mathrm{Im}(z_P)$.

Remarquons que la solution particulière y_P de (E) ainsi obtenue apparaîtra bien sous la forme annoncée $y_P(t) = q(t)\cos(mt) + s(t)\sin(mt)$.

Exercice 2

En utilisant la méthode complexe, déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E): \ y' - 2y = t\sin(t).$$

Début
Précédent
Suivant
Table
Fermer

Les autres cas : Méthode de variation de la constante

On se base sur la solution de l'équation homogène $y_h = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}$. On recopie le résultat dans y_p en remplaçant la **constante** λ par une fonction $\lambda(t)$ inconnue (et à déterminer !!) :

$$\forall t \in I, \qquad \boxed{y_p(t) = \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}}$$

On calcule la dérivée y_p' et on reporte dans l'équation (E) : $y_p' + a(t)y_p = b(t)$. Après calcul, on doit réussir à isoler $\lambda'(t)$:

$$\lambda'(t) = \text{ une fonction de la variable } t$$

On calcule alors une primitive du total (une seule suffit puisqu'on ne cherche qu'une seule solution particulière) pour obtenir $\lambda(t)$. Et on n'oublie pas de reporter le résultat dans le $\boxed{y_p(t) = \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}}$ du début !

Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite. Il faut pour cela être capable de déterminer des primitives !

Exemple. Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) : \; y' - ty = t\,\mathrm{e}^{t^2/2}$$

Lorsque la fonction b est compliquée, on peut quelquefois procéder en plusieurs étapes en découpant b en plusieurs morceaux individuellement plus simples : c'est le principe de superposition. Pour chercher une solution particulière de

$$(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$$

1. On cherche y_{p1} solution particulière de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$.
2. On cherche y_{p2} solution particulière de $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$.
3. On additionne $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

(On peut découper en plus de morceaux si besoin !)

1.4.1. Etape 3 : Solution totale de l'équation

Propriété 6.

Soit a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et (E) l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

Si y_h est une solution de l'équation homogène associée et y_p une solution particulière de l'équation (E) sur I, alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$y = y_p + y_h$$

1.4.2. Etape 4 : Conditions initiales

Définition 7.

Dans une équation différentielle, on appelle condition de Cauchy toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I.

Propriété 8.

Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. L'équation différentielle $(E) : \ y' + a(t)y = b(t)$ avec la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$ admet une solution unique sur I.

Autrement dit, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par un point quelconque de coordonnées $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il passe une courbe intégrale et une seule.

Exercice 3

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y' - ty = 2t$ avec la condition initiale $y(0) = -1$. On donne que l'ensemble des solutions est

$$y(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}} - 2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

2.1. Généralités

Définition 9.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants sur I toute équation du type

$$(E): \qquad \forall t \in I, \quad ay'' + by' + cy = d(t),$$

où a, b, c sont trois éléments (« constantes ») de $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, d une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et y une fonction inconnue deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On appelle solution de (E) sur I toute fonction f deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t).$$

Le graphe d'une solution est appelée une courbe intégrale de (E).

Dans toute la suite, on donnera les résultats pour $I = \mathbb{R}$.

Début
Précédent
Suivant
Table
Plein écran
Fermer

Methode de résolution d'une équation différentielle linéaire : retournez au début du cours si vous avez (déjà) oublié.

2.2. Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

Définition 10.

On appelle équation homogène associée à (E) (ou *équation sans second membre*) l'équation, notée (E_h), définie par

$$(E_h): \qquad \forall t \in I, \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Propriété 11.

L'équation caractéristique d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (avec $a \neq 0$), est l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$. On note Δ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions réelles de l'équation différentielle (E_h) sont alors toutes les fonctions y_h de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_h(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t} \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une unique racine réelle r_0 (racine double). Les solutions réelles de l'équation différentielle (E_h) sont alors toutes les fonctions y_h de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_h(t) = (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{r_0 t} \qquad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Les solutions réelles de l'équation différentielle (E_h) sont alors toutes les fonctions y_h de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \big(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\big) \qquad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque : Toute expression de la forme $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ peut s'écrire sous la forme $R\cos(x + \varphi)$ ou $R\sin(x + \psi)$. Par conséquent, lorsque $\Delta < 0$, on peut aussi affirmer que les solutions réelles de l'équation différentielle homogène (E_h) : $ay'' + by' + cy = 0$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = R\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \qquad \text{avec } (R, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

C'est cette forme qui est couramment utilisée en physique.

Exercice 4

Trouver les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle homogène

$$(E_h) : \; y'' + 2y' + 5y = 0.$$

2.3. Etape 2 : Recherche d'une solution particulière

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, d une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et (E) l'équation différentielle

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = d(t).$$

On dispose de deux méthodes pour déterminer une solution particulière de (E) : soit on trouve une solution particulière vraiment évidente, soit on se trouve dans l'un des cas suivants.

Si $d(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{K}$. On a alors trois cas pour la d'une solution particulière y_p :

- Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, alors on pose $y_p(t) = R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$
- Si m est une racine simple de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, alors on pose $y_p(t) = t \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$
- Si m est la racine double de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, alors on pose $y_p(t) = t^2 \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$

où R est un polynôme inconnu tel que $\deg R = \deg P$ dans tous les cas. On reporte y_p dans l'équation (E) pour déterminer les coefficients de R.

Remarque : le cas où d est un simple polynôme est un cas particulier de cette étude (c'est le cas $m = 0$).

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ :\ \ y'' + 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^{-t}\,.$$

$d(t) = P(t)\cos(mt)$ ou $d(t) = P(t)\sin(mt)$, où P est un polynôme à coefficients réels et $m \in \mathbb{R}$. On pose une équation complexe (*une nouvelle équation, valable uniquement pour aider au calcul d'une solution particulière*) en remplaçant y par z et le $\cos(mt)$ ou $\sin(mt)$ du second membre par e^{imt}.

$$(E_{\mathbb{C}}) \qquad az'' + bz' + cz = P(t)\,\mathrm{e}^{imt}$$

On cherche une solution particulière z_p de cette équation différentielle grâce à la méthode précédente. Puis on revient dans $\mathbb{R}$:

— Si le second membre était $P(t)\cos(mt)$, alors $y_p = \mathrm{Re}(z_p)$

— Si le second membre était $P(t)\sin(mt)$, alors $y_p = \mathrm{Im}(z_p)$

Si $d(t) = P\,(t)\,\mathrm{e}^{kt}\cos\,(mt)$ ou $d\,(t) = P\,(t)\,\mathrm{e}^{kt}\sin\,(mt)$ où P est un polynôme à coefficients réels et $k, m \in \mathbb{R}$, on passe aussi aux complexes et on cherche une solution particulière z_p de l'équation

$$(E_{\mathbb{C}})\ :\ \ az'' + bz' + cz = P(t)\,\mathrm{e}^{(k+im)t}\,.$$

Puis on revient dans $\mathbb{R}$:

— Si le second membre était $P\,(t)\,\mathrm{e}^{kt}\cos\,(mt)$, alors $y_p = \mathrm{Re}(z_p)$

— Si le second membre était $P\,(t)\,\mathrm{e}^{kt}\sin\,(mt)$, alors $y_p = \mathrm{Im}(z_p)$

Remarque : Lorsque la fonction d est compliquée, on peut utiliser le principe de superposition. Pour chercher une solution particulière de

$$(E) : ay'' + by' + cy = b_1(t) + b_2(t)$$

1. On cherche y_{p1} solution particulière de (E_1) : $ay'' + by' + cy = b_1(t)$.
2. On cherche y_{p2} solution particulière de (E_2) : $ay'' + by' + cy = b_2(t)$.
3. On additionne $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

2.4. Etape 3 : Solutions de l'équation

Propriété 12.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, sont toutes les fonctions de la forme $y = y_p + y_h$, où y_h est une solution de l'équation homogène associée et y_p est une solution particulière de l'équation.

2.5. Etape 4 : conditions initiales

Propriété 13.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$, d une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ possède une solution unique vérifiant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.

Exercice 6

Résoudre (E) : $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

3. TD 16 équations différentielles linéaires

Exercice 1

($\star\star$) Résoudre sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut y_0 à l'instant $t = 0$:

$$y' - 3y = 2, \qquad y' - 3t^2 y = t^2, \qquad y' + ty = t^3,$$

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{2t}, \qquad y' - 5y = \mathrm{e}^{5t}, \qquad y' - y = \sin(t).$$

Exercice 2

($\star\star$) Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle précisé :

$$y' + \tan(x)y = \sin(x) \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad y' + \tan(x)y = \cos^3(x) \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$(1 + x^2)y' + 2xy = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 3

($\star\star$)

1. Calculer la dérivée de $f : \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \end{array}$
2. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle (E) : $y' - \dfrac{y}{t-1} = \dfrac{(t-1)}{\sqrt{t^2 - 1}}$.

Exercice 4

($\star\star$) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$(C) \left\{ \begin{array}{l} y' - y = \dfrac{t\,\mathrm{e}^t}{\sqrt{1 + t^2}} - t + 1 \\ y(0) = -1. \end{array} \right.$$

Exercice 5

($\star\star$) Soit (E) l'équation différentielle du premier ordre $xy' + y = 3x^2$.

1. Résoudre cette équation sur $]0\,;+\infty[$, puis sur $]-\infty\,;0[$.
2. Existe-t-il des solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

($\star\star$) Résoudre les équations suivantes et préciser la solution qui vérifie les conditions de Cauchy $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_0'$:

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad y'' - 3y' = 0, \qquad y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \qquad y'' - 2y' + 2y = 0$$

Exercice 7

($\star\star$) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$y'' + 2y' - 8y = \mathrm{e}^{3t}, \qquad y'' - 3y' - 18y = t\,\mathrm{e}^{4t},$$

$$y'' - 10y' + 41y = \sin(t), \qquad y'' - 2y' + 2y = \sin(t)\,\mathrm{e}^{t},$$

$$y'' - 4y' + 3y = 2\,\mathrm{e}^{t} - 3\cos(2t).$$

Exercice 8

(Devoir maison) On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad (1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable pour $x \in]-1; +\infty[$. Résoudre l'équation (E), puis déterminer la solution de l'équation (E) vérifiant $y(0) = 2$.

Table des matières