14. Méthodes de calcul de primitives et d'intégrales

1. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

On rappelle qu'une primitive F d'une fonction continue f est une fonction dérivable vérifiant $F' = f$.

Théorème 1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I

- f possède toujours une primitive F sur I. Toutes les primitives de f sont les fonctions $F + C$ avec C une constante réelle.
- Soit a un élément de I et $k \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(a) = k$.

Exemples.

1. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^3 + 2x + 3$ sont toutes les fonctions F de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction ln est l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Définition 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b appartenant à I, l'intégrale de f entre a et b est le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et défini par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F désigne une primitive quelconque de f sur I, et ce quel que soit l'ordre des réels a et b.

Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur algébrique de l'aire du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses, entre $x = a$ et $x = b$.

Remarque :

- Une intégrale est un nombre.
- Cette définition est licite puisque si F_2 désigne une autre primitive de f sur I, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F_2 = F + C$ et on a alors $F_2(b) - F_2(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.
- La variable x qui apparait sous le signe intégral est une variable muette, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre à condition que cette lettre ne soit pas déjà utilisée.
- Le dx à la fin de l'intégrale est très important, c'est lui qui dit la variable qu'on intégre et où se termine l'intégrale. Ne pas l'oublier ! $\int_a^b \ldots\mathrm{d}x$ signifie que x va de la valeur a à la valeur b.

Propriété.

(relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et ce quel que soit l'ordre des réels a, b et c.

Propriété.

(Linéarité) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Une intégrale peut servir à calculer une primitive qu'on ne peut pas calculer directement. En particulier quand il faut faire une intégration par partie ou un changement de variable, il est indispensable d'écrire la primitive sous forme d'intégrale, avec les bonnes bornes !

Théorème 5.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

1.1. Exploiter les symétries et/ou la périodicité de la fonction à intégrer

On peut exploiter certaines propriétés des fonctions pour simplifier le calcul d'une intégrale :

— Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction paire et continue, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

— Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction impaire et continue, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0$$

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction T-périodique et continue, alors

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt, \quad \int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt,$$

Exemple. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$ est 2π-périodique et qu'on intègre sur une période, donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

De plus la fonction f est impaire, donc $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx = 0$.

2. Reconnaître la dérivée d'une fonction

2.1. Primitives usuelles

La façon la plus simple de trouver une primitive d'une fonction f est de reconnaître en f la dérivée d'une fonction usuelle. On omet à chaque fois la constante dans l'expression des primitives.

Fonction	Primitive	Intervalle
$x^k \quad (k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{x^{k+1}}{k+1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{x^k} \quad (k \in \mathbb{R}\backslash\{1\})$	$\dfrac{1}{1-k}\dfrac{1}{x^{k-1}}$	$\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitive	Intervalle
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1+\tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k\in\mathbb{Z})$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k\in\mathbb{Z})$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$ ou $1-\operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1;1[$

2.2. Reconnaître la dérivée de la composée de deux fonctions

Il est facile de trouver une primitive d'une fonction lorsque celle-ci s'exprime sous la forme de la dérivée de la composée de deux fonctions.

Propriété 6.

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et g une fonction continue sur J. On note G une primitive de g sur J. Une primitive sur I de la fonction $u' \times g(u)$ est la fonction $G(u)$.

En application de ce résultat, on trouve toutes ces primitives classiques :

Fonction	Primitive
$u' \times u^k \qquad (k \neq -1)$	$\dfrac{u^{k+1}}{k+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{u^k} \qquad (k \neq 1)$	$\dfrac{1}{(1-k)u^{k-1}}$
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u

Fonction	Primitive
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}(u)$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(u)$
$u'g(u)$	$G(u)$

Exemples.

Exercice 2

Calculer une primitive de

$$h : x \to \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

3. Transformations d'expressions

Pour obtenir une primitive d'une fonction f continue sur I, il est parfois nécessaire de transformer l'expression de f pour reconnaitre des fonctions que l'on sait intégrer.

3.1. Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

Si f contient des produits ou des puissance de cosinus et/ou sinus, on linéarise l'expression (en remplaçant chaque sinus/cosinus l'aide de la formule d'Euler, puis en

développant tout). On obtient alors une somme de termes en $\cos(\ell x)$ ou $\sin(mx)$ qu'on sait primitiver.

Exercice 3

Linéariser $\sin^2(x)\cos^2(x)$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.

3.2. Cas des fractions rationnelles simples

Pour trouver une primitive d'une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples (c.f le cours sur les fractions rationnelles). Les termes de la décomposition en éléments simples sont alors plus faciles à intégrer :

fonction	primitive
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
$\frac{1}{(ax+b)^k}$ $(k \neq 1)$	$\frac{1}{a(1-k)}\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
$\frac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c}$	c.f changement de variable

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x$.
En effectuant la division euclidienne de X^3 par $X+2$, on obtient $X^3 = (X^2-2X+4)(X+2)-8$. Donc pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$\frac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}.$$

On obtient ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}dx = \int_0^1 x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}.\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|\right]_0^1$$

$$= \frac{10}{3} - 8\ln 3 + 8\ln 2$$

Exercice 4

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \to \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Exercice 5

Décomposer $\dfrac{1}{x^2-1}$ en éléments simples et calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

4. Intégration par parties

4.1. La méthode d'intégration par parties

Théorème 7.

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soit a, b deux éléments de I. On a

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur I, les fonctions $u'v$ et uv' le sont également et possèdent donc des primitives sur I. Puisque uv est dérivable

de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$, la fonction uv est une primitive de la fonction $u'v + uv'$. Autrement dit,

$$\int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$$

ce qui donne l'égalité

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$$

d'où provient la formule d'intégration par parties.

Remarque : La méthode d'intégration par parties sert à calculer des primitives de produit de deux fonctions, en primitivant l'une et dérivant l'autre. Elle peut être utile pour éliminer dans un produit une fonction qui n'est pas simple à primitiver (comme ln, Arcsin, Arctan ...) et dont la dérivée s'intègre plus aisément. Elle permet aussi de calculer des intégrales dépendant d'un paramètre par récurrence (par exemple les intégrales de Wallis).

4.2. la primitive du logarithme népérien

Il arrive souvent qu'on utilise la formule d'intégration par parties, alors qu'aucun produit n'apparaît à priori dans la fonction f à primitiver... L'astuce (à connaître) consiste à considérer que l'on intègre le produit $\boxed{1} \times f$.

Exemple. Calculer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.3. Intégrales de fonctions de la forme $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

Le principe est d'appliquer plusieurs fois la méthode d'intégration par parties en dérivant le polynôme, ce qui finit par le faire disparaitre.

Exercice 6

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t^2+3t)\,\mathrm{e}^t\,. \end{array}$$

4.4. Fonctions de la forme $f(x) = P(x)\cos(ax)$ ou $f(x) = P(x)\sin(ax)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

On applique plusieurs fois la méthode d'intégration par parties en dérivant le polynôme.

Exercice 7

Calculer

$$\int_0^{\pi} (x^2+2x-3)\sin(2x)\mathrm{d}x$$

5. Changements de variables

5.1. Définition

Théorème.

Soit f une fonction continue sur un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans J. Soit a et b deux éléments de I. On a

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\,.\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

5.2. Technique

Disons que l'on veuille effectuer un changement de variable dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Cette méthode s'applique de deux manières différentes :

1er cas On exprime une nouvelle variable en fonction de l'ancienne : $t = \varphi(x)$.
Cette technique est très utilisée lorsque la fonction f est presque sous la forme $f(x) = \varphi'(x)g(\varphi(x))$. Il faut alors effectuer chacune des étapes suivantes :

1. Vérification On vérifie que φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a et b.
2. Les bornes On transforme les bornes de l'intégrale : si $x = a$, alors $t = \varphi(a)$ et si $x = b$, alors $t = \varphi(b)$.
3. La différentielle on calcule $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ (en "dérivant" $t = \varphi(x)$).
4. L'intégrande Dans $f(x)\,\mathrm{d}x$, on cherche à faire apparaitre le terme $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on le met de coté. Dans tout ce qui reste, on doit voir apparaitre $\varphi(x)$. Il ne doit pas rester de x "tout seul".
5. Remplacement on remplace tout d'un seul coup. $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}t$, tous les $\varphi(x)$ par t et les bornes par les nouvelles bornes... et on continue le calcul.

Exercice 8

On veut calculer $\displaystyle\int_0^{5\pi/2} \cos(x)\cos(\sin x)\ \mathrm{d}x$ en posant $t = \sin x$:

- Si $x = 0$, alors $t =$ ..... (borne inférieure)
- Si $x = 5\pi/2$, alors $t =$ ..... (borne supérieure)
- en "dérivant" $t = \sin x$, on trouve $dt = \cdots dx$. Faire apparaitre ce terme dans l'intégrale et l'encadrer.
- Dans le reste de l'intégrale, entourer toute les apparitions de l'expression $\sin x$.

Dans l'intégrale, remplacer les bornes, placer dt et t. Puis finir le calcul.

2ème cas On exprime l'ancienne variable en fonction d'une nouvelle : $x = \psi(t)$.

1. Les bornes On cherche α tel que $\psi(\alpha) = a$ et β tel que $\psi(\beta) = b$.
2. Vérification On vérifie que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités α et β.
3. La différentielle : on calcule $\mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$ (en "dérivant" $x = \psi(t)$) ;
4. Remplacement : On remplace tout d'un seul coup : $\mathrm{d}x$ par $\psi'(t)\,\mathrm{d}t$, tous les autres x par $\psi(t)$ et les bornes. Puis on continue le calcul de l'intégrale.

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

5.3. Quotients de polynômes trigonométriques

Supposons que l'on soit amené à calculer une primitive d'une fonction rationnelle en sin et cos, c'est-à-dire d'un quotient de polynômes trigonométriques de la forme

$$f(x) = \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}$$

où $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$ désignent des polynômes à deux indéterminées.

On pense alors à effectuer un changement de variable du type $u = \cos(x)$, $u = \sin(x)$ ou $u = \tan(x)$.

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{2+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \cos(x)$.

Remarque : Si $u = \cos x$, $u = \sin x$ et $u = \tan x$ ne marchent pas , on peut essayer $u = \cos(2x)$ ou $u = \tan(\frac{x}{2})$ avec les formules de l'angle moitié.
Il faut faire attention lorsque l'on effectue un changement de variable avec la fonction tangente de ne pas intégrer sur un intervalle contenant un élément de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

5.4. Primitives d'éléments simples

On veut primitiver une fraction de la forme

$$\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}, \quad a,b,c,d,e \in \mathbb{R}, \Delta = b^2-4ac < 0.$$

On va chercher à se ramener à des primitives connues de la forme $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^k}$ et $\frac{1}{1+x^2}$.
En bref, les étapes à suivre dans l'ordre :

1. Gérer le dx au numérateur Si il y a du x au numérateur, on sépare l'élément simple en deux fractions. Une fraction est de la forme $\frac{u'}{u}$ (de primitive en $\ln|u|$) et une autre est de la forme $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.
2. Gérer le bx au dénominateur On utilise une identité remarquable pour faire apparaitre un carré parfait et une constante. Puis on fait un changement de variable pour se ramener à une fraction du type $\frac{1}{At^2+B}$.
3. Dérivée d'une arctangente On fait un deuxième changement de variable pour se ramener à une fraction du type $\frac{1}{y^2+1}$.

Il est possible de faire en une seule fois les deux changements de variable pour aller plus vite.

1)Gérer le dx au numérateur : Si y a du x au numérateur, on l'utilise pour faire apparaitre la dérivée du dénominateur au numérateur :

$$\frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{d}{2a}(2ax+b)+\text{ cst}}{ax^2+bx+c} = \frac{d}{2a} \times \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \text{ cst} \times \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Ce qui permet de calculer le début de la primitive. Il restera un terme en $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ à primitiver ensuite.

Exemple. On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$. Le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif, donc on ne peut pas décomposer davantage, c'est un élément simple. On utilise le x du numérateur pour faire apparaitre la dérivée du dénominateur.

2) Gérer le bx au dénominateur Dans la fraction restante $\frac{1}{ax^2+bx+c}$, si il y a un bx au dénominateur, on doit le faire disparaitre. On met le polynôme le ax^2+bx+c sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}.x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\heartsuit$$

On pose comme changement de variable ce qui est à l'intérieur du carré ($t=\sqrt{a}.x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$) et on obtient une fraction du type $\frac{1}{t^2+B}$.

Exemple. (suite) Il reste à calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$

3) Faire apparaitre la dérivée d'une Arctangente

Technique. : On veut calculer l'intégrale $\int_a^b \frac{1}{At^2+B}dt$ avec A et B deux nombres réels strictement positifs. L'objectif est de faire apparaitre $\frac{1}{y^2+1}$ qu'on sait primitiver.

1. On factorise B au dénominateur pour faire apparaître le $+1$.

$$\int_a^b \frac{1}{At^2+B}dt=\int_a^b \frac{1}{B\left(\frac{A}{B}t^2+1\right)}dt$$

2. On rentre tout dans le carré :

$$\int_a^b \frac{1}{At^2+B}dt=\frac{1}{B}\int_a^b \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{A}{B}}t\right)^2+1}dt$$

3. On fait le changement de variable $y=\sqrt{\frac{A}{B}}t$ (le terme dans le carré) dans l'intégrale, ce qui permet d'obtenir $\frac{1}{y^2+1}$ et on peut faire la primitive.

Exercice 10

Primitiver

$$f(t) = \frac{1}{3t^2+2}$$

6. TD 14 intégrales

Exercice 1

($\star$) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$f : x \to 2e^{2x}, \quad g : x \to \cos(4x), \quad k : x \to x\,\mathrm{ch}(x^2)$$

Exercice 2

($\star\star$) Calculer une primitive des fonctions suivantes (préciser sur quel intervalle).

$$f_1 : t \mapsto (2t^2+3t+1) \quad f_2 : t \mapsto (t+1)\sqrt{t} \quad f_3 : t \mapsto \frac{(1+t)^2}{\sqrt{t}} \quad f_4 : t \mapsto \frac{t^2-t+1}{t+1}$$

$$f_5 : t \mapsto \cos^4(t) \qquad f_6 : t \mapsto \cos^3(t)\sin(t) \qquad f_7 : t \mapsto \cos(3t)\sin(2t)$$

Exercice 3

($\star\star$) Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3-3x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x \quad I_2 = \int_0^{\pi/4} (1+\tan(x))^2\mathrm{d}x \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 4

($\star\star$) Calculer la primitive qui s'annule en a des fonctions suivantes à l'aide d'intégrations par parties (préciser l'intervalle de travail).

$$g_1 : t \mapsto t^3 \ln(t) \quad (a = 1) \quad g_2 : t \mapsto \operatorname{Arcsin}(t) \quad (a = 0) \quad g_3 : t \mapsto t^2 \operatorname{Arctan}(t) \quad (a = 0)$$

$$g_4 : t \mapsto \mathrm{e}^{2t} \cos(t) \quad (a = 0) \qquad g_5 : t \mapsto \sin(\ln(t)) \quad (a = 1)$$

Exercice 5

($\star\star$) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties.

$$\int_0^1 t^3 \, \mathrm{e}^{\alpha t} \, \mathrm{d}t \qquad \int_0^\pi t^2 \sin(\alpha t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 6

($\star\star$) Calculer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable (préciser l'intervalle de travail).

$$h_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 16}, \quad h_2 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} \quad (y = x^2), \quad h_3 : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{9 - \sin^2 x}} \quad (y = \sin x),$$

$$h_4 : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \quad (y = e^x). \qquad h_5 : x \mapsto \frac{1}{1 + x + x^2}$$

Exercice 7

($\star\star$) Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

$$J_1 = \int_0^{(\ln 3)/2} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x \quad (y = e^x) \qquad J_2 = \int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \quad (t = \tan(u))$$

$$J_3 = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (y = \sqrt{x}), \qquad J_4 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (u = \sqrt{x^2-1}).$$

Exercice 8

($\star\star\star$) Calculer les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)dx}{(\cos(x)+2).(\cos(x)-2)}, \quad K_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)dx}{1+\cos^2(x)}, \quad K_3 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4(x)}.$$

Exercice 9

Les intégrales de Wallis ($\star\star\star$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation entre W_n et W_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$. (remarquer que $\sin^n(x) = \sin(x).\sin^{n-1}(x)$).
3. En déduire que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 10

($\star\star\star$) Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x$.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire la valeur de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle **1**
1.1 Exploiter les symétries et/ou la périodicité de la fonction à intégrer . . . 4

2 Reconnaître la dérivée d'une fonction **5**
2.1 Primitives usuelles 5
2.2 Reconnaître la dérivée de la composée de deux fonctions 6

3 Transformations d'expressions **7**
3.1 Linéarisation d'un polynôme trigonométrique 7
3.2 Cas des fractions rationnelles simples 8

4 Intégration par parties **9**
4.1 La méthode d'intégration par parties 9
4.2 la primitive du logarithme népérien 10
4.3 Intégrales de fonctions de la forme $f(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ 10
4.4 Fonctions de la forme $f(x) = P(x)\cos(ax)$ ou $f(x) = P(x)\sin(ax)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ 11

5 Changements de variables **11**
5.1 Définition 11
5.2 Technique 12
5.3 Quotients de polynômes trigonométriques 13
5.4 Primitives d'éléments simples 14

6 TD 14 intégrales **16**