Intégrales multiples

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Plan

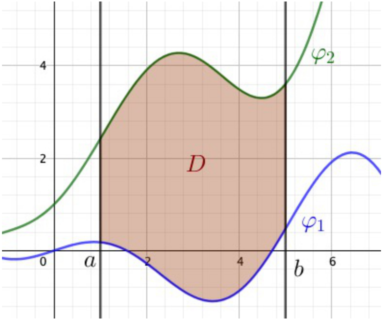
fonction réelle de deux variables

$$z = f(x, y)$$

- le domaine de définition de f est une surface D
- sa représentation graphique est une surface d'altitude variable

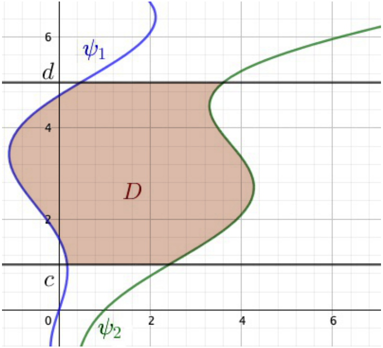
Surface comprise entre deux fonctions de x.

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \right\}$$

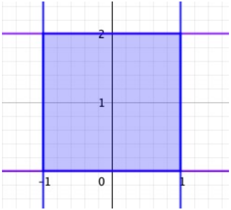


Surface comprise entre deux fonctions de y.

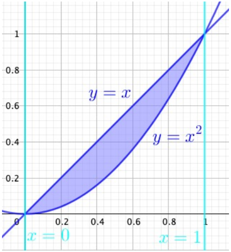
$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; c \leqslant y \leqslant d, \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y) \right\}$$



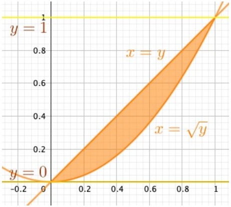
Exemples : $D_1 = [-1;1] \times [0;2]$



$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant x\}$$



$$D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\}$$



Définition

f fonction continue sur

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \right\}$$

L' intégrale double de f sur D est

$$\iint_D f = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Définition

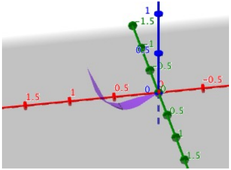
f fonction continue sur

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; c \leqslant y \leqslant d, \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y) \right\}$$

L' intégrale double de f sur D est

$$\iint_D f = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Exemple : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant x\}$



$$\iint_D x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Interprétations graphiques :

- L'aire de D est

$$\mathcal{A}_D = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Si f est positive sur D,

$$\iint_D f = \text{ le volume situé sous la surface de } f$$

Théorème de Fubini

Théorème.

D un domaine défini des deux façons :

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}, \end{aligned}$$

f une fonction continue sur D.

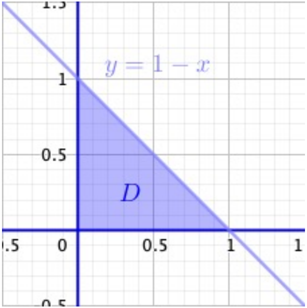
$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Exercice

On pose

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}, I = \iint_D (x^2 + y^2)$$

1. Calculer I en intégrant d'abord en y, puis en x.
2. Calculer I en intégrant d'abord en x, puis en y.

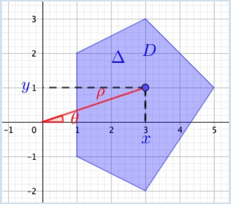


Propriété.

f définie sur D. On passe en coordonnées polaires (ρ, θ)

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta)$$

D (domaine de (x, y)) devient Δ (domaine de (ρ, θ))



$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) |\rho| \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta.$$

Exemple : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \iint_D f = ?$$

f en coordonnées polaires :

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho\cos\theta\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Domaine D en fonction de ρ et θ.

- Les conditions $x > 0, y > 0$ signifient que $\theta \in [0, \pi/2]$
- $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ équivaut à $1 \leqslant \rho \leqslant 2$.

Donc $\Delta = \{(\rho, \theta), \theta \in [0, \pi/2], 1 \leqslant \rho \leqslant 2\}$.

On passe en coordonnées polaire dans l'intégrale

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta \frac{1}{2}\sin(2\theta)|\rho|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\rho d\rho\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}\sin(2\theta)\rho^2\right]_1^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\sin(2\theta)d\theta$$

$$= \left[-\frac{3}{8}cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Plan

Définition

Un domaine simple D de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y)\}.$$

Si f est une fonction continue sur D, l'intégrale triple de f sur D est

$$\iiint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

notée aussi $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Exemple : $f(x,y,z) = x^2y^3z$ continue sur

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant xy\}$$

$$\iiint_D f = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} x^2y^3zdzdydx = \int_0^1 \int_0^1 \ x^2y^3 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^4y^5}{2}dydx = \int_0^1 \left[\frac{x^4y^6}{12}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{12}dx = \left[\frac{x^5}{60}\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

Remarque : Le volume de la partie D est égal à $\displaystyle\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

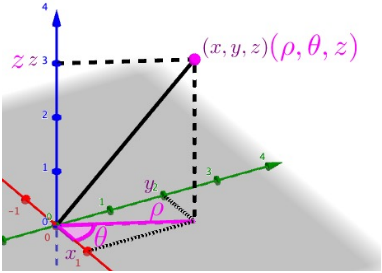
Propriété.

Le passage en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

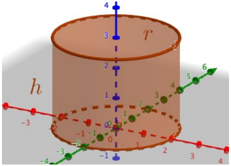
$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta), \quad z = z$$

transforme D en Δ et

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Delta f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)|\rho|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$



Exemple : Calcul du volume du cylindre C de rayon $r > 0$ et de hauteur $h > 0$.



On calcule $\iiint_C dxdydz$ en utilisant le changement de variable cylindrique. Le domaine d'intégration devient

$$\Delta = \{(\rho, \theta, z), 0 \leqslant z \leqslant h, 0 \leqslant \rho \leqslant r, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\iiint_C dxdydz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r |\rho| d\rho d\theta dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\theta dz$$

$$= \frac{r^2}{2} 2\pi h = \pi h r^2$$

Passage en coordonnées sphériques

Propriété.

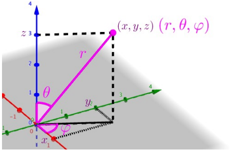
Le passage en coordonnées sphérique (r, θ, φ)

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad z = r\cos(\theta)$$

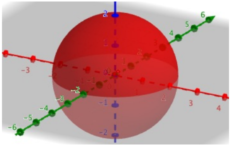
transforme D en Δ et

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$\iiint_\Delta f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))\cdot r^2|\sin(\theta)|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$



Exemple : Volume d'une sphère de rayon $R > 0$.



La sphère correspond au domaine

$$\Delta = \{(r, \theta, \phi), r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\iiint_S dxdydz = \iiint_S r^2 |\sin(\theta)| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 |\sin(\theta)| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin(\theta) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^3}{3} \cos(\theta) \right]_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi$$

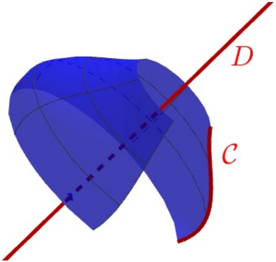
$$= \int_0^{2\pi} \frac{2R^3}{3} \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Plan

Pour une courbe :

- un arc de courbe plane $\mathcal{C}$ (fermée ou ouverte)
- une droite D qui ne coupe pas la courbe.
- On fait pivoter $\mathcal{C}$ autour de D d'un angle α

$\Rightarrow$ une surface de révolution



Centre de gravité d'une courbe homogène

Propriété.

un arc de courbe

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} : [t_1, t_2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (x(t), y(t)) \end{array}$$

Les coordonnées du centre de gravité G de $\mathcal{C}$ sont

$$x_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt},$$

$$y_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}$$

Remarque : le dénominateur est la longueur de la courbe.

Théorème.

- un arc de courbe plane $\mathcal{C}$ de longeur L et de centre de gravitéG
- une droite D qui ne coupe pas la courbe, H le projeté orthogonal de G sur D.
- On fait pivoter $\mathcal{C}$ autour de D d'un angle α

$\Rightarrow$ surface de révolution. Alors l'aire de cette surface est

$$\mathcal{A} = \alpha \times GH \times L$$

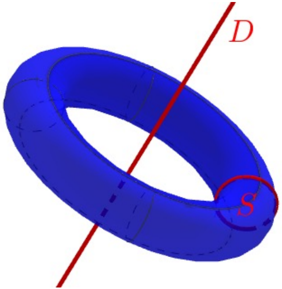
l'aire est le produit de la longueur de la courbe (L) avec la longueur de l'arc parcouru par G pendant la rotation (αGH)

Exemple : On considère un tore engendré par un cercle de rayon a et dont le centre Ω est à une distance d de la droite D.

- Le centre de gravité d'un cercle est son centre donc $G = \Omega$
- $GH = d$.
- L'angle de la rotation est 2π
- la longueur du cercle est $L = 2\pi r$.

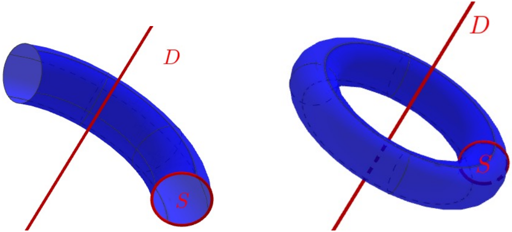
L'aire du tore est donc

$$\mathcal{A} = 2\pi \times d \times 2\pi r = 4\pi^2 rd$$



Pour une surface :

1. Un arc de courbe fermé délimite une surface S.
2. La rotation de cette surface crée un volume V



Exemple : Un cercle délimite un disque. Quand ce disque fait un tour complet autour d'un axe, il génère un tore (un donut).

Centre de gravité d'une surface homogène

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère On cherche G le centre de gravité de la surface. On supposera encore que la masse est répartie de manière homogène dans la surface

Propriété.

Un arc de courbe $\mathcal{C}$ fermé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, délimitant une surface S d'aire $\mathcal{A}$.

Les coordonnées du centre de gravité G de $\mathcal{C}$ sont

$$x_G = \frac{\iint_{(x,y)\in S} x dx dy}{\mathcal{A}}, \qquad y_G = \frac{\iint_{(x,y)\in S} y dx dy}{\mathcal{A}},$$

Théorème de Guldin pour une surface homogène

Théorème.

- $\mathcal{C}$ un arc de courbe plane fermée délimitant une surface d'aire $\mathcal{A}$ et de centre de gravité G
- D une droite ne traversant pas la courbe
- H le projeté orthogonal de G sur D.

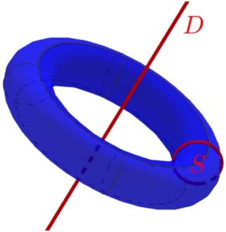
Le volume engendré par la rotation d'axe D et d'angle α appliqué sur la surface est

$$V = \alpha \times GH \times \mathcal{A}$$

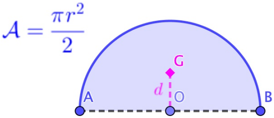
Le volume est le produit de l'aire de la surface ($\mathcal{A}$) avec la longueur de l'arc parcouru par G pendant la rotation (αGH)

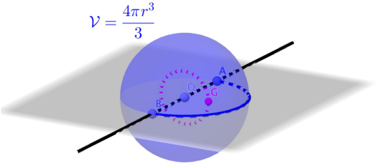
Exemple : On reprend le tore. L'aire du disque est $L = \pi r^2$. Le volume du tore est donc

$$V = 2\pi \times d \times \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 d$$



Exemple : $\mathcal{C}$ demi-cercle de centre O et de rayon r, délimitant le demi-disque. On cherche la position de son centre de gravité G (la longueur d)





On fait pivoter le demi-cercle d'un angle 2π autour de $(AB) \Rightarrow$ une sphère. Le théorème de Guldin donne $V = 2\pi \times d \times \mathcal{A}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \times d \times \frac{\pi r^2}{2} = \pi^2 r^2 d \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

Donc le point G se situe à la distance $\frac{4r}{3\pi}$ de O.