Equations aux dérivées partielles

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Cadre simplifié : fonctions de deux ou trois variables

Plan

1 EDP

2 Technique du changement de variables

Définition

Une équation aux dérivées partielle (EDP) est une équation contenant

- une fonction inconnue u de plusieurs variables
- ses dérivées par rapport aux variables
- d'autres fonctions connues
- et se terminant par $=0$

L'ordre de cette équation est le plus élevé des ordres des dérivées partielles.

Une solution de cette EDP est une fonction f qui marche dans l'équation.

Exemples :

- L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ (u fonction de trois variables)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

EDP d'ordre 2.

- u une fonction de deux variables

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

EDP d'ordre 3.

- Trouver f tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z) = \vec{v}$, c'est aussi une *EDP* !

Une EDP peut s'accompagner de conditions :

- Valeur de la fonction ou de ses dérivées à un instant donné (conditions initiales).
- Valeur de la fonction ou de ses dérivées sur un domaine.
- Valeur de la fonction ou de ses dérivées quand une variables tend vers l'infini.

Ces conditions peuvent changer radicalement les solutions de l'équations. De plus, des fonctions "ordinaires" ne suffisent pas toujours à donner les solutions...

en bref, résoudre une EDP est un problème difficile. On va se contenter de faire des exemples simples.

Exemple : Résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(1,2,3) = 2$$

avec u une fonction de trois variables.

Exercice

Résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec u une fonction de trois variables.

Plan

1 EDP

2 Technique du changement de variables

Changement de variable affine

Pour résoudre une EDP, on
pose de nouvelles variables

$$u = ax + by, \quad v = cx + dy$$

avec a, b, c, d des constantes.

Exemple : EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad (E)$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x+y \\ v & = & x-y \end{array} \right. \quad \to \quad \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

f devient donc une nouvelle fonction inconnue g :

$$f(x,y) = g(u,v) = g\Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = g \circ \Phi(x,y)$$

On veut trouver des relations entre les dérivées de f par rapport à x, y et celles de g par rapport à u, v.

$$J(f)(x,y) = J(g)(\Phi(x,y)) \times J(\Phi)(x,y)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v),\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v),\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v),\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ & . & \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{array}\right.$$

On reporte dans l'équation (E) :

$$(E): \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

$$2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g(u,v) = H(u)$$

Avec H une fonction réelle. On en déduit que

$$f(x,y) = H(u(x,y)) = H(x+y)$$

Ce sont toutes les solutions de l'équation (E).

Changement de variable polaire.

Pour résoudre une EDP, on pose de nouvelles variables $r > 0$ et θ telles que

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

avec a, b, c, d des constantes.

Exemple : On veut résoudre l'équation suivante

$$(E): \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

On pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}\right. \quad \to \quad \Psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

f devient g :

$$g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(\Psi(r,\theta)) = f\circ\Psi(r,\theta)$$

On veut trouver des relations entre les dérivées de f par rapport à x, y et celles de g par rapport à r, θ :

$$J(g)(r,\theta) = J(f)(\Psi(r,\theta)) \times J(\Psi)(r,\theta)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r}(r,\theta), & \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r}(r,\theta), & \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \begin{pmatrix} \cos\theta, & -r\sin\theta \\ \sin\theta, & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Or c'est f que je veux isoler en fonction de g.

On doit donc multiplier de chaque coté, à droite, par la matrice inverse de

$$\begin{pmatrix} \cos\theta, & -r\sin\theta \\ \sin\theta, & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculons l'inverse :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta, & -r\sin\theta \\ \sin\theta, & r\cos\theta \end{pmatrix} \cos\theta L1, \sin\theta L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta, & -r\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta, & r\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin^2\theta, & r\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \sin^2\theta L_1 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\cos\theta\sin^2\theta & \sin\theta-\sin^3\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix} L_2/(r\cos\theta\sin\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\cos\theta\sin^2\theta & \sin\theta\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta), \quad \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$$

Et on peut reporter dans (E) (sans oublier de remplacer x et y)

$$r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$$

$$+r\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$$

$$= 2\sqrt{r^2}$$

$$r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 2r$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 2$$

On primitive en r :

$$g(r,\theta) = 2r + h(\theta)$$

avec h une fonction.

Si on veut revenir à x et y, on a $r = \sqrt{x^2+y^2}$, mais pour θ.....