Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Plan

Définition

$A \subset \mathbb{R}^n$. Une application/fonction de A dans $\mathbb{R}^p$ est

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont les fonctions coordonnées de f.

Si $p \neq 1$, f est un champ de vecteurs

Si $p = 1$, f est un champ de scalaires

Exemples :

- Si $n = 1$ et $p = 1$: fonctions réelles.
- Si $n = 1$ et $p = 2$: courbes paramétriques.
- Si $n = 2$ et $p = 1$: fonctions réelles de deux variables.

Limite et continuité

Définition

f admet ℓ pour limite en a (point ou frontière de A) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to a} f_1(x) & = & \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to a} f_2(x) & = & \ell_2 \\ & \vdots & \\ \lim\limits_{x \to a} f_p(x) & = & \ell_p \end{array} \right.$$

Définition

Si $a \in A$, f est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si f est continue sur A si f est continue en tout point de A

L'ensemble $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^p)$ des fonctions continues A est un espace vectoriel.

Propriété.

f est continue sur $A \Leftrightarrow$
ses applications coordonnées sont continues sur A.

Exemple :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(x^2+xy, \dfrac{x}{x^2+2y^2+1}\right). \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car ses deux applications coordonnées sont continues.

Dérivées partielles

Définition

f a une dérivée partielle en $a \in A$ suivant la $j-$ième variable
$\Leftrightarrow$
les fonctions coordonnées de f ont toutes une dérivée partielle par rapport à la $j-$ième variable

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1(A) \Leftrightarrow$ ses fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1(A)$.

Définition

La matrice jacobienne de f en a est

$$J(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Lorsque $n = p$, la matrice jacobienne de f en a est une matrice carrée et son déterminant est le jacobien de f en a.

Exemple : Calculer la matrice jacobienne au point $(1, 2, 0)$ de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2. \\ & (x, y, z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2y^3z^4 \\ \frac{xy}{z^2+x^2+1}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice

(TD) Calculer la matrice jacobienne de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2. \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Notion.

$$J(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Exemple : La fonction permettant de passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes est

$$
f \quad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) & \to & \begin{pmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \end{pmatrix} \end{array}
$$

Au point (ρ, θ), la matrice jacobienne est

$$
J(f)(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(J(f)(\rho, \theta)) = \rho
$$

fonction composée et fonction réciproque

Théorème.

f et g fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
(sur ensembles de définition adéquats)
La fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$J(g \circ f)(a) = J(g)(f(a)) \times J(f)(a)$$

Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2. \\ (r,\theta) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3. \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x^2-y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J(f)(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

La composée $g \circ f$ est la fonction g exprimée en coordonnées polaires :

$$g \circ f(r,\theta) = \begin{pmatrix} r(\cos(\theta) + \sin\theta) \\ r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ r^2 \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

Sa matrice jacobienne est

$$J(g \circ f)(r,\theta) = J(g)(r\cos\theta, r\sin\theta)J(f)(r,\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2r\cos\theta & -2r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta & r(\cos\theta - \sin\theta) \\ 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & -4r^2\sin\theta\cos\theta \\ 2r\sin\theta\cos\theta & r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

Théorème.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective sur A, alors la bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $f(A)$.

Pour $a \in A$ et $b = f(a)$,

$$J(f^{-1})(b) = \Big(J(f)(a)\Big)^{-1}.$$

la matrice jacobienne de f^{-1} est l'inverse de la matrice jacobienne de f.

Exemple :

$$A =]0, +\infty[\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2, \qquad \begin{array}{rcl} f : A & \to & A \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}, \end{array}$$

$$J(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Montrons que f est une bijection. On prouve que l'équation

$$f(x, y) = (a, b)$$

a une unique solution (x, y) pour tout $(a, b) \in A$.

Soit $(a, b) \in A$ (> 0), on cherche $(x, y) \in A(> 0)$ tel que $f(x, y) = (a, b)$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & x^2 \\ b & = & xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \sqrt{a} \\ y & = & \frac{b}{\sqrt{a}} \end{array} \right.$$

f est bien une bijection de A dans A. Sa bijection réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} U & \to & U \\ (a, b) & \mapsto & (\sqrt{a}, \frac{b}{\sqrt{a}}) \end{array}$$

On calcule sa matrice jacobienne en inversant la matrice $J(f)(x,y)$

$$(J(f)(x,y))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ \frac{-y}{2x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

puis en remplaçant $x = \sqrt{a}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{a}}$

$$J(f^{-1})(a,b) = \left(J(f)(\sqrt{a}, \frac{b}{\sqrt{a}}) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{a}} & 0 \\ \frac{-b}{2a\sqrt{a}} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

Exercice

(TD) Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2. \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$$

Montrer que f est une bijection, calculer sa bijection réciproque et la matrice jacobienne de la réciproque (par deux méthodes différentes).

Notions.

1. f est une bijection si l'équation $f(x, y) = (a, b)$ a une unique solution (x, y) pour TOUT $(a, b) \in A$. Alors $(x, y) = f^{-1}(a, b)$
2. $$J(f^{-1})(a, b) = \Big(J(f)(x, y)\Big)^{-1}.$$

Plan

Dans cette partie, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Définition

L'opérateur formel nabla ∇ est

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Définition

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ de scalaires.
Le gradient de f est

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f$$

Le Laplacien de f est

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

Définition

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\to \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

La divergence de F est

$$\text{div } F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot F$$

Le rotationnel de F est

$$\text{Rot } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \wedge F$$

Définition

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\to \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Le Laplacien de F est

$$\triangle F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \nabla^2 F$$

Propriété.

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^2$

1. La divergence d'un rotationnel est nulle : $\text{div}\,(\text{Rot}\ F) = 0$
2. $\text{Rot}\,(\text{Rot}\ F) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\ F) - \triangle F$

Propriété.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ de scalaires de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Le rotationnel d'un gradient est le vecteur nul :
   $\text{Rot}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \vec{0}$
2. Le laplacien est la divergence du gradient :
   $\triangle f = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)$

Remarque : (à conditions que certaines hypothèses soient vérifiées)

Propriété.

si Rot $F = \vec{0}$, alors il existe un champ de scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que

$$F = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

Si div $(F) = 0$ alors il existe un champ de vecteur $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que

$$F = \text{Rot } f$$

Remarque : Sous certaines conditions.

Exemple :

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\text{Rot } F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(yz)}{\partial z} - \frac{\partial(xy)}{\partial x} \\ \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc il existe un champ de scalaire f tel que $F = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} & = & xy \end{cases}$$

$$L_1 \quad \rightarrow \quad f(x, y, z,) = xyz + "c" = xyz + c(y, z)$$

report dans L_2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz \quad \Rightarrow \quad xz + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = xz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = 0$$

$$c(y, z) = c(z) \quad \rightarrow \quad f(x, y, z,) = xyz + c(z)$$

report dans L_3

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \quad \Rightarrow \quad xy + \frac{\partial c(z)}{\partial z} = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial c(z)}{\partial z} = 0$$

$$c(z) = c \quad \rightarrow \quad f(x, y, z) = xyz + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Exercice

(TD) On considère dans $\mathbb{R}^3$ le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2xy + z^2 \\ 2yz + x^2 \\ 2xz + y^2 \end{pmatrix}$$

Calculer $\overrightarrow{Rot}(\vec{v})$. En déduire qu'il existe une fonction scalaire $f(x, y, z)$ telle que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y, z) = \vec{v}$. Déterminer f.