Les séries entières

Définition

$z_0 \in \mathbb{C}$

le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| < r\}$$

le disque fermé de centre z_0 et de rayon r :

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| \leqslant r\}$$

le cercle de centre z_0 et de rayon r :

$$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| = r\}.$$

Plan

Définition et rayon de convergence

Définition

La série entière centrée en $z_0 \in \mathbb{C}$ est

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

Les complexes a_n sont les coefficients de la série entière.

Sur le domaine D de convergence, la fonction somme de la série est

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Exemple : Les polynômes sont des séries entières très simples.

Objectif : Déterminer le domaine de convergence et les propriétés de $S(z)$

(Pour simplifier) Séries entières centrées en 0

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

Si série centrée en z_0, on pose $Z = (z - z_0) \Rightarrow$ série entière de Z centrée en 0

Définition

série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ (complexe)

$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ converge pour $r \in [0, R[$ ou $[0, R]$

R (réel positif ou $+\infty$) est le rayon de convergence de la série entière.

Exemples : $P = \sum_0^N a_k x^k$ un polynôme à coefficients complexe

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_k| r^k = |a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \cdots + |a_d| r^d$$

converge pour tout $r \in [0, +\infty[$. Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Exemple :

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \to (N \to \infty) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } r < 1 \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$$

La série converge pour $r \in [0, 1[$.

> Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est $R = 1$.

Exemple :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

on étudie la convergence de $\sum \frac{r^n}{n!}$.

$$\frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \frac{r}{n+1} \to 0 < 1$$

par critère de d'Alembert, la série converge pour tout $r \in [0, +\infty[$.

Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

Exemple :

$$\sum_{n\geqslant 0} n!z^n = 1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \cdots$$

On étudie la convergence de $\sum n!r^n$:

$$\frac{r^{n+1}(n+1)!}{r^n n!} = r(n+1) \to \infty \qquad (r \neq 0)$$

La série diverge pour $r > 0$. la série converge pour $r = 0$

Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n!z^n$ est $R = 0$.

Propriété.

$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ avec rayon de convergence $R > 0$.

- Si $|z| < R$, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

le disque ouvert $D(0, R)$ est le disque de convergence de la série entière

Remarque : Pour $|z| = R$, tout peut arriver.

Exemple :

Exercice

(TD)Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 2.
Les séries numériques suivantes convergent-elles ?

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n 3^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n, \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n (-2)^n$$

Notion. rayon de convergence R.

- Si $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

La règle de D'Alembert pour les séries entières

Théorème.

$\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$
Si

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow \ell \quad (n \to \infty)$$

alors le rayon de convergence est

$$R = \frac{1}{\ell}$$

(avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$).

Démonstration. On étudie la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}|a_n|r^n$

$$\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n}=r\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\longrightarrow r\ell$$

Par la règle de d'Alembert des séries,

- la serie converge si $r\ell<1\Leftrightarrow r<\frac{1}{\ell}$
- la serie diverge si $r\ell>1\Leftrightarrow r>\frac{1}{\ell}$

Donc le rayon de convergence est

$$R=\frac{1}{\ell}$$

Exemple : Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{n}z^n$$

Opérations sur les séries entières

Propriété.

$\sum a_n z^n$ avec rayon de convergence R_a et $\sum b_n z^n$ avec rayon R_b.

$\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ converge sur le disque ouvert de rayon $\min(R_a, R_b)$ au moins, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

si $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Remarque : Si $R_a = R_b$ le rayon de convergence de la somme peut être supérieur au $\min(R_a, R_b)$.

Propriété.

$\sum a_n z^n$ avec rayon de convergence R_a. $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $\lambda \neq 0$, alors le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} \lambda a_n z^n$ est R_a et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Si $\lambda = 0$ alors rayon de convergence infini.

Exercice

(TD) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 2, et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 3. Que peut-on dire sur le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(a_n - b_n)z^n$?

Notion. Si $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Plan

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

avec a_n, x réels et rayon de convergence $R > 0$

intervalle de convergence :

- $[-R, R]$
- $[-R, R[$
- $]-R, R]$
- $]-R, R[$

suivant que la série entière converge ou non en R et $-R$.

Théorème.

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec rayon de convergence $R > 0$

1. S est continue sur$]-R, R[$.
2. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ converge alors S est continue en R.
3. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n (-R)^n$ converge alors S est continue en $-R$.

S est dérivable sur $]-R, R[$, sa dérivée a aussi pour rayon de convergence R, et on dérive terme à terme

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad x \in]-R, R[$$

Remarque : $S'(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} (N+1) a_{N+1} x^N$.

Corollaire.

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec rayon de convergence $R > 0$.

S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

$$S^{(k)}(0) = k! a_k$$

Exemple :

Intégration

Théorème.

$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec rayon de convergence $R > 0$.
Sur $]-R, R[$, une primitive de S est

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

avec rayon de convergence R.

Remarque : on peut intégrer une série entière terme à terme.

Exemple :

Exercice

(TD) Soit la série entière

$$s(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{4n}{6n^2 - 1} x^n$$

de rayon de convergence 1.

1. Calculer la série entière dérivée s' et une série entière S primitive de s.
2. Quel est le rayon de convergence de s' et de S ?

Notions. Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont on note S la fonction somme.

1. Sa dérivée a aussi pour rayon de convergence R et on dérive la série entière terme à terme.
2. Sa primitive a aussi pour rayon de convergence R et on intégre la série entière terme à terme.

Plan

Fonctions développables en série entière

Définition

f définie au moins sur $]-r,r[$ (avec $r > 0$) est développable en série entière sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple :

Unicité et écriture

Théorème.

f développable en série entière

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

(unique !)

Remarque : Si on tronque, on a un développement limité.

Attention ! $\mathcal{C}^\infty$ n'implique pas développable en série entière !

Corollaire.

f développable en série entière

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Si f est paire alors $a_{2n+1} = 0$. (coefficients de degré impair tous nuls).
2. Si f est impaire, alors $a_{2n} = 0$. (coefficients de degré pair tous nuls).

Opérations

Propriété.

Opérations autorisées sur les fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$:

- Addition-soustraction
- Multiplication par une constante
- Dérivation (autant qu'on veut)
- Primitive

Développements en série entière usuels

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \qquad x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad x \in]-1, 1[$$

Calcul de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$S(0) = 1$.

rayon de convergence $+\infty$, donc S est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x)$$

Donc S est la solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$ avec condition initiale $y(0) = 1$. Or, Cette solution est e^x.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Exercice

(TD) Donner le développement en série entière de la fonction

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1-x}$$

ainsi que son rayon de convergence.

Notions.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \forall x \in]-1, 1[$$

Technique : Déterminer le développement en série entière de sin autour de 0 avec une équation différentielle.

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots, \qquad x \in]-1,1[$$

Remarque :

Plan

Définition

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini dans $\mathbb{C}$

L'exponentielle complexe est

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$