Compléments sur les équations différentielles

Plan

1. équations différentielles linéaires

2. équation différentielles non linéaires d'ordre 1

Ce qu'on sait déjà résoudre

Equation linéaire du premier ordre

$$(E): \quad y' + a(x)y = b(x)$$

Solutions

$$y(x) = y_p(x) + \lambda \exp(-A(x))$$

- $\lambda \in \mathbb{R}$
- A une primitive de a
- y_p une solution particulière de l'équation.

Equation linéaire du second ordre à coefficients constants.

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = d(x)$$

avec a, b, c des constantes.

équations différentielles linéaires d'ordre 2

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$(E): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

l'équation homogène associée est

$$(H): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Théorème.

$$(H): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

$$y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

avec y_1 et y_2 deux solutions non colinéaires de S_H

$$(E): \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

avec y_p une solution particulière de (E).

Si on rajoute des conditions initiales $\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}$, il y a une unique solution.

Méthode de résolution particulière

$$(E): \ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

1. suggestion de l'énoncé ou solution évidente : f solution particulière de l'équation homogène ne s'annulant pas.
2. On pose $y = u \times f$ et on reporte dans l'équation (E) :

$$\cdots calculs \cdots \heartsuit \ u'' + \spadesuit \ u' = d$$

3. On pose $z = u'$: $\heartsuit \ u'' + \spadesuit \ u' = d$
4. On trouve $z \rightarrow u$ par primitive (ne pas oublier la constante) $\rightarrow$ $y = u \times f$

Exemple : Résoudre (E) : $x^2y'' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en remarquant que la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

est une solution particulière de (E) sur cet intervalle.

Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition

Un système linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants est

$$(S) \quad \begin{cases} y_1' = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n \\ y_2' = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \cdots + a_{n,n}y_n \end{cases}$$

avec $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des fonctions réelles inconnues

Définition

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$:

$$(S) \qquad Y' = AY$$

avec A une matrice

Exemple : $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 3z \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -3x + 3y + 2z \end{cases}$ devient

$$Y' = AY, \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Théorème.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } (S) : Y' = AY.$$

L'ensemble des solutions de (S) est un espace vectoriel de dimension n.

Il existe une unique solution Y de (S) vérifiant

$$Y(t_0) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

(conditions initiales)

Si A est diagonalisable

$$(S) : Y' = AY$$

On diagonalise la matrice $A = PDP^{-1}$ avec P (base des vecteurs propres) et D diagonale.

$$Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = D(P^{-1}Y).$$

On pose

$$U = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad U' = P^{-1}Y' \quad \Rightarrow \quad U' = DU$$

On a alors

$$U' = DU \iff \begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \\ \vdots \\ u_n' = \lambda_n u_n \end{cases} \iff U : \begin{cases} u_1 = k_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ u_2 = k_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ u_n = k_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Finalement

$$Y = PU$$

il est absolument inutile de calculer P^{-1} !

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} x' = -4x + 3y + 3z \\ y' = -3x + 2y + 3z \\ z' = -3x + 3y + 2z. \end{cases}$

Autres exemples de méthodes de résolution

Changement de fonction (ou d'inconnue).

Exercice

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation

$$x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = \dfrac{y}{x}$.

Aide. Exprimer y en fonction de z, dériver et reporter dans l'équation pour obtenir une équation en z.

Changement de variable.

Exemple : Résoudre $x^2y'' - 2xy' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Plan

Il n'y a plus de méthodes "universelles" dès que l'équation n'est plus linéaire.

équations différentielles à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est

$$y' \times a(y) = b(x)$$

Exemple :

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Technique :

$$y' \times a(y) = b(x)$$

On primitive de chaque coté :

- $y' \times a(y) \rightarrow \quad A(y)$ avec A primitive de a
- $b(x) \rightarrow B(x)$

$$A(y) = B(x) + \lambda$$

Il reste à isoler y.... Avec A^{-1} la bijection réciproque de A

$$y(x) = A^{-1}(B(x) + \lambda)$$

Exemple : Résoudre sur $]0, +\infty[$

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

équations de Bernoulli

Définition

Une équation différentielle de Bernouilli est

$$(E_\alpha) \qquad y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$$

a et b deux fonctions.

Remarque : $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, on sait déjà faire !

Technique : On cherche les solutions y qui ne s'annulent pas sur I (ou strictement positives si $\alpha \notin \mathbb{N}$)

1. On divise toute l'équation par y^α :

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$

2. On pose

$$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} \quad \to \quad z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$$

   On remplace dans l'équation

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x)$$

3. On trouve z, puis y.

Exemple : Chercher les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de

$$(E) \qquad y' - 2ay + by^2 = 0.$$

a et b constantes réelles strictement positives :

équations de Ricatti

Définition

une équation différentielle de Ricatti est

$$(E) \qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Technique :

1. y_p une solution particulière de (E)
2. On pose
$$y = y_p + z$$
On reporte dans (E) ....
$$(E') \qquad z' = \spadesuit z + \heartsuit z^2$$
3. On trouve z avec la méthode des équations de Bernoulli. Puis y.