Séries de Fourier

1. Coefficients de Fourier et série de Fourier

2. Théorèmes de convergence d'une série de Fourier

3. Forme exponentielle des coefficients de Fourier

Intégrale d'une fonction périodique

f est $\boxed{\text{périodique de période } T}$ (ou T-périodique)

$$f(x+T) = f(x)$$

Le graphe de f a un motif de longueur T qui se répète.

Propriété.

f fonction $T-$périodique et continue par morceaux.
L'intégrale de f est la même sur tout intervalle de longueur T.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^T \longrightarrow \int_\alpha^{\alpha+T} \text{ ou } \int_{-T/2}^{T/2}$$

Plan

1. Coefficients de Fourier et série de Fourier
2. Théorèmes de convergence d'une série de Fourier
3. Forme exponentielle des coefficients de Fourier

Définitions générales

Définition

La pulsation

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les les coefficients de Fourier de f sont

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\mathrm{d}t$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\mathrm{d}t. \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Définition

La série de Fourier de f est

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\cos(\omega n t) + b_n(f)\sin(\omega n t) \Big)$$

Remarque : Si on arrête la somme à N : $S_N(f)$ la somme partielle de la série de Fourier.

$S(f)(t)$ converge-t-elle ?
Pour quels t ? et ça vaut quoi ?

Parité, imparité

Propriété.

Si f est paire, alors

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$$

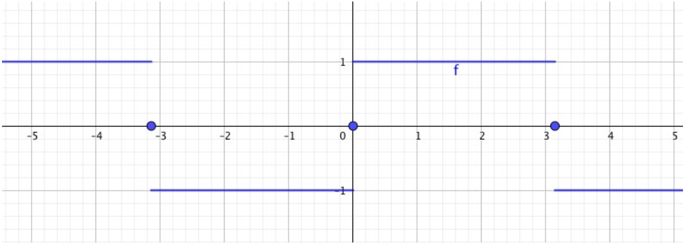
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n(f) = 0, \quad a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

Si f est impaire, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 0$$

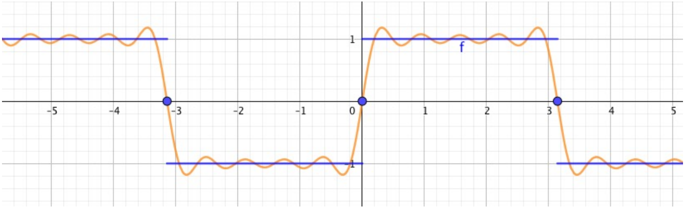
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t.$$

Exemple : Soit f la fonction impaire, $2\pi-$périodique qui vaut 1 sur l'intervalle $]0, \pi[$, et 0 en 0 et π. Calculer les coefficients de Fourier de f et écrire sa série de Fourier.



Représentation de la somme partielle

$$S_9(f)(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7t) + \frac{4}{9\pi}\sin(9t)$$



Exercice

(TD) Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que :

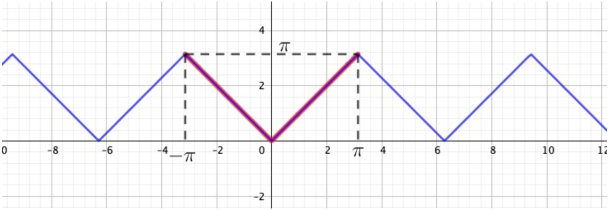
$$\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = t$$

Tracer f. Déterminer le développement en série de Fourier de f.

Notions.

- Si f est paire, alors $a_0(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$, $b_n(f) = 0$, $a_n(f) = \dfrac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$.
- La série de Fourier de f est

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(\omega nt) + b_n(f)\sin(\omega nt))$$



4
2
-2
0
-8
-6
-4
$-\pi$
-2
0
2
π
4
6
8
10
π

Plan

1 Coefficients de Fourier et série de Fourier

2 Théorèmes de convergence d'une série de Fourier

3 Forme exponentielle des coefficients de Fourier

Convergence quadratique : la formule de Parseval

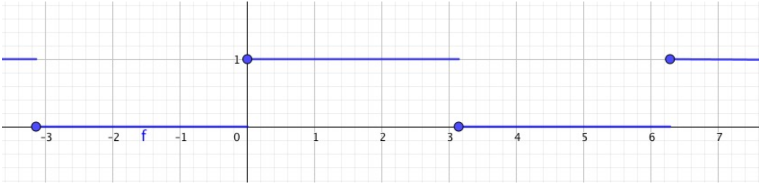
Théorème.

f fonction $T-$périodique et continue par morceaux.

- $\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_n^2(f)+b_n^2(f))$ converge
- Identité de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{d}t = a_0^2(f)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f)+b_n^2(f)\right)$$

Exemple : Soit f la fonction 2π périodique qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, \pi[$ et 0 sur l'intervalle $[\pi, 2\pi[$.



Exercice

(TD) Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [0;\pi],\ f(t) = t$$

Appliquer le théorème de Parseval à f.
On rappelle que $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}$, tous les autres coefficients de Fourier de f étant nuls.

Notion. Si f est continue par morceaux :

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 \mathrm{d}t = a_0^2(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f) + b_n^2(f)\right).$$

Théorème. Dirichlet 1

f fonction $T-$périodique et $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge.

- Pour t où f est continue :

$$S(f)(t) = f(t)$$

- Pour t où f n'est pas continue, on calcule

$$f(t^+) = \lim_{x \to t^+} f(x), \qquad f(t^-) = \lim_{x \to t^-} f(x)$$

  Alors

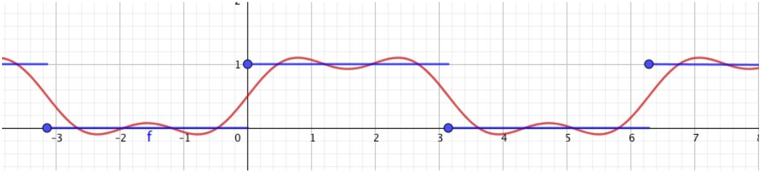
$$S(f)(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$$

  (milieu entre la valeur à gauche et la valeur à droite de t).

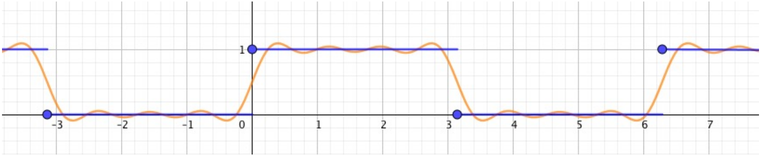
Exemple :

Somme partielle

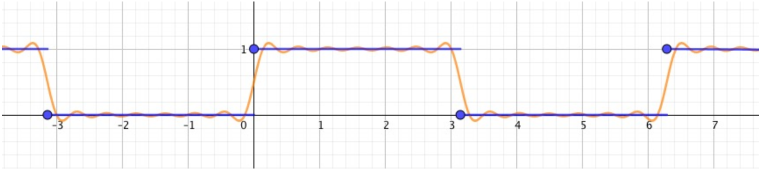
$$S_3(f)(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3t)$$



$$S_7(f)(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t)$$



$$S_1 1(f)(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t) + \frac{2}{9\pi}\sin(9t) + \frac{2}{11\pi}\sin(11t)$$



Théorème. Dirichlet 2

f fonction $T-$périodique, $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$ et $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.

La série de Fourier de f converge en tout point de $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = f(t).$$

- $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes.
- $\displaystyle\int_x^y f(t)\mathrm{d}t =$

$$\int_x^y a_0(f)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_x^y \Big(a_n(f)\cos(\omega n t) + b_n(f)\sin(\omega n t) \Big)\, \mathrm{d}t$$

Exercice

(TD) Soit la fonction f paire et 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [0;\pi], \;\; f(t) = t$$

Appliquer le théorème de Dirichlet à f et évaluer la série de Fourier pour $t = 0$. On rappelle que

$$S(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k \geqslant 0} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi} \cos(2p+1)t$$

Notion. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $T-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = f(t).$$

Plan

1 Coefficients de Fourier et série de Fourier

2 Théorèmes de convergence d'une série de Fourier

3 Forme exponentielle des coefficients de Fourier

Propriété.

f fonction réelle $T-$périodique et continue par morceaux. Les coefficients de Fourier complexes sont

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \quad n \in \mathbb{Z}$$

La série de Fourier de f est

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\,\mathrm{e}^{ik\omega t}\,.$$

Propriété.

$$a_0(f) = c_0(f), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{cases}$$

Théorème. Parseval complexe

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big(f(t)\Big)^2 \mathrm{d}t = (c_0(f))^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2\Big).$$

Et il en reste quoi ?

Soit f une fonction 2π- périodique.

1. Sa pulsation est $\omega =$
2. Le coefficients de Fourier $a_n(f)$ vaut
3. On note a_0, a_n, b_n les coefficients de Fourier de f. La série de Fourier de f est $S_f(t) = \dots$
4. Si f est $\mathcal{C}^1$, quelle est la relation entre $S_f(t)$ et $f(t)$?

Réponses

Soit f une fonction 2π- périodique.

1. Sa pulsation est
   $\omega = 1$
2. Le coefficients de Fourier $a_n(f)$ vaut

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

3. On note a_0, a_n, b_n les coefficients de Fourier de f. La série de Fourier de f est $S_f(t) = \dots$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

4. Si f est $\mathcal{C}^1$, quelle est la relation entre $S_f(t)$ et $f(t)$?
   $S_f(t) = f(t)$.