Espaces vectoriels euclidiens
(2)

Plan

Définition

Un endomorphisme f de E est orthogonal si

$$\forall x, y \in E,\ (f(x) \,|\, f(y)) = (x \,|\, y).$$

il conserve le produit scalaire

Remarque : La norme aussi $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$. $\rightarrow$ « isométrie vectorielle ».

Exercice

(TD) Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, montrer que l'endomorphisme f défini par

$$f(x, y) = (-y, x)$$

est orthogonal.

Notion. Un endomorphisme f de E est dit orthogonal si, et seulement si, il conserve le produit scalaire $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$, ou alors la norme $\|f(x)\| = \|x\|$.

Corollaire.

Un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E est un automorphisme de E (une bijection) :

automorphisme orthogonal

Démonstration. Soit f un endomorphisme orthogonal.

$$x \in \mathrm{Ker}(f) : f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f(x)\| = 0$$

$$\|x\| = \|f(x)\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

f est injectif. Par théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$, donc f surjectif. Donc f est bijectif.

Exemples : Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des automorphismes orthogonaux.

La symétrie orthogonale s par rapport à F (sev) est un automorphisme orthogonal, mais pas la projection orthogonale sur F.

$$x = x_F + x_{F\perp}, \quad \to s(x) = x_F - x_{F\perp}$$

$$\|s(x)\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

(Pythagore) et encore (Pythagore)

$$= \|y + z\|^2 = \|x\|^2$$

Théorème.

$\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

Groupe orthogonal

1. l'élément neutre pour la composition Id_E est orthogonal.
2. La composée de deux automorphismes orthogonaux de E est un automorphisme orthogonal de E.
3. L'automorphisme réciproque d'un automorphisme orthogonal de E est un automorphisme orthogonal de E.

Matrices

Définition

Une matrice A est orthogonale si son inverse est égale à sa transposée

$$A^{-1} = {}^tA, \qquad {}^tAA = I_n$$

Exercice

(TD) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tAA$. Que peut-on en déduire ?

Notion. ${}^tA$ est la matrice obtenue en transformant les colonnes de A en lignes, ou alors en faisant la symétrie des coefficients par rapport à la diagonale de A.

Théorème.

$\mathcal{O}(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

Groupe orthogonal d'ordre n : noté .

1. la matrice I_n, est orthogonale.
2. Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.
3. L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

De plus, le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1.

Démonstration. Soit A matrice orthogonale : ${}^tAA = I_n$

$$1 = \mathrm{Det}(I_n) = \mathrm{Det}({}^tAA) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}({}^tA) = \mathrm{Det}(A)^2.$$

Propriété.

Un endormorphisme f est orthogonal
$\Leftrightarrow$ sa matrice $M(f)$ dans une base orthonormale est orthogonale.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormée $\Leftrightarrow$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

Classement des automorphismes orthogonaux

On veut la liste complète de tout les automorphismes orthogonaux dans le plan et dans l'espace.

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad \text{ou} \qquad E = \mathbb{R}^3$$

f un endomorphisme de E avec A sa matrice dans une base orthonormale (canonique le plus souvent !)

On vérifie que f conserve le produit scalaire ou que ${}^tAA = I_n$. Donc f est un automorphisme orthogonal, A est une matrice orthogonale.

Quel type d'automorphisme est f ou A ?

Presque orthogonal...

Si on obtient

$$ {}^tAA = kI_n $$

A n'est pas orthogonale. On pose

$$ A' = \frac{1}{\sqrt{k}} A $$

alors

$$ A = \underbrace{\sqrt{k} I_d}_{\text{homothétie}} \times \underbrace{A'}_{\text{orthogonale}} $$

f correspond donc à la composée entre un endomorphisme orthogonal et une homothétie de rapport $\sqrt{k}$. Et il reste à étudier A' (au lieu de A).

On détermine F le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par f.

$$F = \{x \in E, \quad f(x) = x\} = \{X \in \mathbb{R}^n, \quad AX = X\}$$

ainsi que $\det A$ (qui vaut 1 ou -1).

Théorème.

Un automorphisme orthogonal dont l'ensemble des vecteurs invariants est un hyperplan est la réflexion par rapport à cet hyperplan.

Plan

Automorphismes orthogonaux du plan

$$E = \mathbb{R}^2$$

F l'ensemble des vecteurs invariants est un sous-espace vectoriel de E, donc sa dimension est 0, 1 ou 2.

Si $\dim(F) = 2.$ Donc $F = E$ et tout les vecteurs de E sont invariant par f.

$$\boxed{f \quad = \quad \mathrm{Id}_E}$$

f est de déterminant 1

Si $\dim(F) = 1$. F est une droite vectorielle = hyperplan de E.

f est la réflexion par rapport à la droite vectorielle F

f est de déterminant -1

Si $\dim(F) = 0$.

- Si $\forall x \in E$, $f(x) = -x$, alors $f = -\mathrm{Id}_E$, c'est aussi la rotation d'angle π.

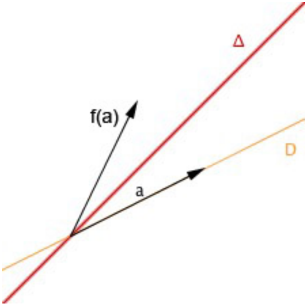
- Sinon,on peut trouver un vecteur $a \neq \vec{0}$ avec $f(a)$ non colinéaire à a. On pose :
  - D droite dirigée par a
  - Δ droite dirigée par $a + f(a)$ (elle passe au "milieu" de a et $f(a)$).
  - s la symétrie orthogonale par rapport à Δ

on s'intéresse à

$$s \circ f$$

$s \circ f$ est un automorphisme orthogonal.

$$s \circ f(a) = s(f(a)) = a$$



Donc toute la droite D est invariante par $s \circ f$, donc $s \circ f = s'$ est la réflexion par rapport à D.

$$f = s^{-1} \circ s' = s \circ s'$$

f est la composée de deux réflexions.

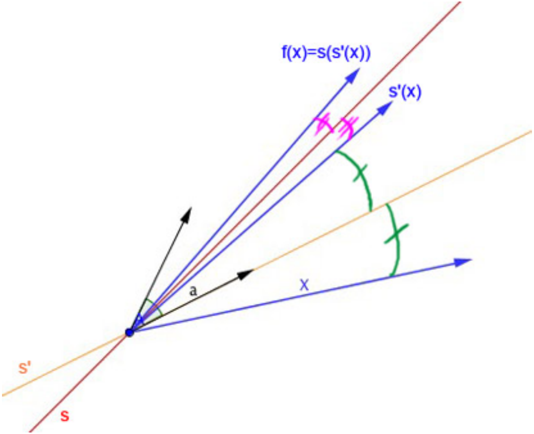
$$\det(f) = \det(s \circ s') = \det(s)\det(s') = (-1)^2 = 1$$

Mais on peut aller plus loin ....

θ = angle $(a, f(a))$.

Pour tout x, on cherche l'angle $(x, f(x))$

$(x, f(x)) = (x, s(s'(x)))$.



En intercalant $s'(x)$ au milieu :

$$(x, f(x)) = (x, s'(x)) + (s'(x), s(s'(x))) = 2 \text{ vert } + 2 \text{ rose}$$

Vert + rose = angle entre les deux axes = moitié de l'angle $(a, f(a))$.

$$(x, f(x)) = (a, f(a)) = \theta$$

Si $\dim(F) = 0$.

f est la rotation vectorielle d'angle θ

Son déterminant vaut 1

Propriété.

Les automorphismes orthogonaux du plan :

- identité
- rotations
- réflexions (det -1)

le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$ = automorphisme orthogonaux de déterminant 1, donc rotation et identité.

identité = rotation d'angle 0. Donc les automorphismes orthogonaux du plan :

- rotations $\rightarrow$ composée de deux réflexions.
- réflexions

> automorphismes orthogonaux du plan = une ou deux réflexions.
>
> ---
>
> les réflexions engendrent le groupe orthogonal.

Si f est une rotation du plan $\rightarrow$ angle θ

1. choisir un vecteur unitaire v
2. Calculer $f(v)$
3. utiliser les formules

$$\begin{cases} \cos(\theta) = (v \mid f(v)) \\ \sin(\theta) = \det(v, f(v)) \end{cases}$$

Propriété.

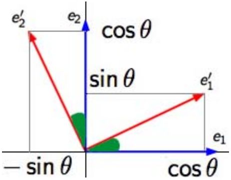
La composée des rotations d'angle θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

les matrices orthogonales dans le plan

A la matrice orthogonale de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}(e_1, e_2)$.

1. $e_1' = f(e_1)$
2. $e_2' = f(e_2)$
3. on met en colonne côte à côte.

Si f est la rotation d'angle θ.



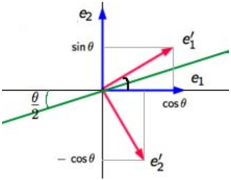
$$e_1' = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2, \qquad e_2' = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice

(TD) Dans $\mathbb{R}^2$ orienté par sa base canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. (on dit aussi **quart de tour**).

Notion. Dans une base orthonormale, la matrice d'une rotation est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ l'angle de la rotation.

Si f est une réflexion. 

$$e_1' = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2, \qquad e_2' = \sin\theta\, e_1 - \cos\theta\, e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Attention, ce θ dépend de l'angle entre la droite et la base !

Bonus

Si f est une réflexion. Si on prend

- e_1 vecteur directeur de l'axe de la réflexion
- e_2 orthogonal à l'axe.

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et il en reste quoi ?

1. Pour vérifier que f de matrice A est un automorphisme orthogonal, on calcule ...
2. Pour trouver l'espace F des vecteurs invariants de f, on résout...
3. Dans le plan, donner la liste des automorphismes orthogonal.
4. Dans le plan, en base orthonormale, la matrice d'une rotation d'angle θ est ...

Réponses

1. Pour vérifier que f de matrice A est un automorphisme orthogonal, on calcule ...
   $A^t A = I_n$
2. Pour trouver l'espace F des vecteurs invariants de f, on résout...
   $f(X) = X$
3. Dans le plan, donner la liste des automorphismes orthogonal.
   Réflexion (symétrie orthogonale par rapport à une droite) et rotation.
4. Dans le plan, en base orthonormale, la matrice d'une rotation d'angle θ est
   $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$