Espaces vectoriels euclidiens
(1)

Plan

Définition

E espace vectoriel euclidien $=$

- un espace vectoriel
- de dimension finie n
- un produit scalaire.

Produit scalaire

Définition

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

x et y vecteurs $\to (x \mid y)$ nombre (produit scalaire de x et y)

avec les règles :

1. $(\lambda x_1 + \mu x_2 \mid y) = \lambda(x_1 \mid y) + \mu(x_2 \mid y)$
   $(x \mid \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x \mid y_1) + \mu(x \mid y_2)$
2. $(x \mid y) = (y \mid x)$
3. $(x \mid x) \geqslant 0$
4. $(x \mid x) = 0 \iff x = 0$

Exemples :

1. $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel euclidien avec le produit scalaire canonique $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z') \to (u|v) = xx' + yy' + zz'$.

2. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel euclidien avec le produit scalaire canonique $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\to \quad (x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

3. Dans $\mathbb{R}^n$, $(x \mid y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + \cdots + nx_ny_n$ est aussi un produit scalaire, mais différent du précédent.

Exemple : Pour $f, g \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \in \mathbb{R}$$

1. Bilinéaire
2. Symétrique
3. $(f \mid f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt \geqslant 0$ car $f^2 \geqslant 0$.
4. $(f \mid f) = 0 \iff \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$ Comme f^2 est positive et continue, $f^2 = 0 \iff f = 0$

$\rightarrow$ produit scalaire.

Mais $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel euclidien car pas de dimension finie.

Exercice

(TD) On considère l'application $(.|.)$ définie ci-dessous

$$\begin{array}{rccl} (.|.): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & & \to & ((x,y)|(x',y')) = 2xx' + 3yy' \end{array}$$

Montrer que l'application $(.|.)$ est un produit scalaire. Calculer le produit scalaire des vecteurs $(-2,2)$ et $(5,1)$.

Notion. un produit scalaire doit obéir à trois règles :

1. bilinéarité : $(\lambda x_1 + \mu x_2 \,|\, y) = \lambda(x_1 \,|\, y) + \mu(x_2 \,|\, y)$ et $(x \,|\, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x \,|\, y_1) + \mu(x \,|\, y_2)$ pour tout x_1, x_2, y_1, y_2, x et y des vecteurs de E et λ, μ des réels.
2. symétrie : $(x \,|\, y) = (y \,|\, x)$ pour tout $x, y \in E$
3. définie positif : $(x \,|\, x) \geqslant 0$ et $(x \,|\, x) = 0 \iff x = 0$ pour tout $x \in E$.

Définition

La norme de x associée au produit scalaire est

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

Un vecteur est unitaire si sa norme $= 1$.

Propriété.

1. $\|x\| \geqslant 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$
4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Remarque : norme = « longueur »

Exemples :

1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}.$$

2. Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini avant

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Exercice

(TD) Soit le produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} (.|.) : \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \to & \big((x,y)|(x',y')\big) = 2xx' + 3yy' \end{array}$$

Donner la norme associée à ce produit scalaire. Calculer la norme du vecteur $(1,1)$.

Notion. la norme de x est définie par $\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}$.

Propriété. Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\forall x, y \in E, \quad |(x \mid y)| \leqslant \|x\| \; \|y\|$$

égalité$\Leftrightarrow$ x et y colinéaires.

Exercice

(TD) Soit le produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} (.|.): \quad \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \rightarrow & ((x,y)|(x',y')) = 2xx' + 3yy' \end{array}$$

Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire et simplifier l'inégalité.

Propriété.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x\,|\,y) + \|y\|^2,$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x\,|\,y) + \|y\|^2,$$
$$(x\,|\,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Démonstration.

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x+y) + (y|x+y)$$
$$= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

Orthogonalité

Définition

- x et y sont orthogonaux si $(x \mid y) = 0$.
- Une famille de vecteurs est orthogonale si ses éléments sont orthogonaux deux à deux.
- Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthonormale (orthonormée) si et si ses éléments sont orthogonaux deux à deux et si chaque vecteur est unitaire.

Remarque :

- Le vecteur nul est orthogonal à tout les vecteurs.
- Une famille orthogonale est libre.

Exercice

(TD) Soit le produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} (.|.): \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \to & ((x,y)|(x',y')) = 2xx' + 3yy' \end{array}$$

Montrer que les vecteurs $(1,2)$ et $(-3,1)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire. L'angle entre ces vecteurs est-il un angle droit ?

Notion. Deux vecteurs x et y de E sont dit orthogonaux si et seulement si $(x \mid y) = 0$.

Théorème. Pythagore

1. $$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
$$\iff \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Définition

E espace vectoriel euclidien de dimension n.

Une famille orthonormale à n éléments est une base orthonormale de E.

Remarque : Il y en a toujours une !

Propriété.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale.
Si x a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et $y(y_1, \dots, y_n)$ dans cette base, alors

$$(x \mid y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}.$$

Remarque : avec $y = e_i$, on a $x_i = (x \mid e_i)$.

Exercice

(TD) Soit le produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} (.|.): \quad \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \big((x,y),(x',y')\big) & \to & \big((x,y)|(x',y')\big) = 2xx' + 3yy' \end{array}$$

D'après ce qui précède $\big((1,2),(-3,1)\big)$ est une base orthogonale. En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ (pour ce produit scalaire). Calculer les coordonnées du vecteurs $(-4,6)$ dans cette base.

Notions.

1. Une famille de vecteurs de E est dite orthonormale si et seulement si ses éléments sont orthogonaux deux à deux et si chaque vecteur est unitaire (de norme 1).
2. La i-ième coordonnée de x dans la base orthonormale $(e_1, e_2, \cdots)$ est $x_i = (x \mid e_i)$.

Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux

$$F \perp G$$

si

$$\forall x \in F,\ \forall y \in G, \quad (x \mid y) = 0,$$

tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$D = \mathrm{Vect}(1,2) = \{u = a(1,2) = (a,2a)\},$$
$$D' = \mathrm{Vect}(-2,1) = \{v = b(-2,1) = (-2b,b)\}$$

Pour $u \in D, v \in D'$,

$$(u|v) = \Big((a,2a)|(-2b,b)\Big) = -2ab + 2ba = 0,$$

Donc $D \perp D'$.

Définition

F un sous-espace vectoriel de E.
L'orthogonal de F est

$$F^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ (x \mid y) = 0\}.$$

Ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

$F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E :
le supplémentaire orthogonal de F.

Démonstration. Montrons que $F^\perp$ est un supplémentaire de F

$$F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}, \qquad E = F + F^\perp$$

Soit $x \in F \cap F^{\perp}$
$$\|x\|^2 = (x \,|\, x)$$
Le premier $x \in F$ et le deuxième $x \in F^{\perp}$. Donc
$$\|x\|^2 = (x \,|\, x) = 0$$
Donc $x = \vec{0}$ et
$$F \cap F^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

On cherche

$$x = x_F + x_{F^\perp}$$

Analyse : $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base orthonormale de F

$$x_F = (x_F \mid f_1)\, f_1 + \cdots + (x_F \mid f_p)\, f_p$$

On calcule

$$(x \mid f_i) = (x_F + x_{F^\perp} \mid f_i) = (x_F \mid f_i) + \underbrace{(x_{F^\perp} \mid f_i)}_{0} = (x_F \mid f_i)$$

Donc

$$x_F = (x \mid f_1)\, f_1 + \cdots + (x \mid f_p)\, f_p, \quad x_{F^\perp} = x - x_F$$

Vérification : Le vecteur x_F appartient bien à F car il s'exprime avec la base de F.
Vérifions que $x_{F^\perp}$ est bien dans $F^\perp$

$$(x_{F^\perp} \mid f_k) = \left(x - \sum_{i=1}^{p} (x \mid f_i)\, f_i \;\middle|\; f_k \right)$$

$$= (x|f_k) - \sum_{i=1}^{p} (x|f_i) \underbrace{(f_i|f_k)}_{0 \text{ si } i \neq k, 1 \text{ si } i=k} = (x|f_k) - (x|f_k) = 0$$

Donc on a réussi

$$x = x_F + x_{F^\perp}$$

Donc $E = F + F^\perp$. Finalement, $F \oplus F^\perp = E$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ munit du produit scalaire canonique,

$$P : x - y = 0, \quad P^{\perp} = \text{Vect}\{w(1, -1, 0)\}$$

$$u(1, 1, 0), v(0, 0, 1) \to u \in P, v \in P, (u|v) = 0$$

Donc (u, v) base orthogonale de P.

$$\|u\| = \sqrt{2} \to f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad f_2 = v = (0, 0, 1)$$

(f_1, f_2) est une base orthonormale de P.

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $X = X_P + X_{P^\perp}$.

$$X_P = (X|f_1)f_1 + (X|f_2)f_2$$

$$= \left((x,y,z)|(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + ((x,y,z)|(0,0,1)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + (z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

Et

$$X_{P^\perp} = X - X_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D$$

Projections et symétries orthogonales

Définition

La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$:

$$\begin{array}{rcc} p : E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_{F^\perp} & \longmapsto & p(x) = x_F \end{array}$$

Remarque : Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormale de F, alors

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid f_i) f_i.$$

Exemple : On reprend l'exemple précédent. p la projection orthogonale sur $P : x - y = 0$. Alors, pour $X = (x, y, z)$:

$$p(X) = X_P = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z \right)$$

Définition

La distance de x à F est

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

avec $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F.

$d(x, F)$ est la plus petite distance possible entre x et un vecteur de F.

Définition

La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$:

$$\begin{array}{rcl} s : E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_{F^\perp} & \longmapsto & s(x) = x_F - x_{F^\perp} \end{array}$$

Remarque : Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormale de F, alors

$$s(x) = 2\sum_{i=1}^{p} (x \mid f_i) f_i - x.$$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, on reprend P d'équation $x - y = 0$ et on rappelle que

$$X = X_P + X_{P^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donner s la symétrie orthogonale par rapport P.

Notion. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie s par rapport à F parallèlement à $F^\perp$:

$$s : \begin{array}{ccc} E = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_{F^\perp} & \longmapsto & s(x) = x_F - x_{F^\perp} \end{array}$$

Définition

E de dimension n.

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan F (sous-espace vectoriel de dimension $n-1$).

Remarque :

- Dans le plan, les réflexions sont les symétries axiales.
- Dans l'espace de dimension 3, les réflexions sont les symétries orthogonales par rapport à un plan.

Plan

Espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geqslant 1$ avec $(\,|\,)$ produit scalaire.

Définition

$f : E \to E$ un endomorphisme.
f est un endomorphisme symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Propriété.

f un endomorphisme symétrique.
La matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique

$${}^t\mathrm{Mat}_B(f) = \mathrm{Mat}_B(f).$$

Théorème.

f un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base de vecteurs propres de f qui est orthonormée et dans laquelle la matrice de f est diagonale (f diagonalisable)

A matrice symétrique. A est diagonalisable et on peut avoir $A = PD^tP$ en prenant P orthogonale ($P^{-1} =^t P$)

Exemple : Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ par une matrice orthogonale et écrire la relation de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Et il en reste quoi ?

1. E est un espace vectoriel euclidien si il a quelles caractéristiques ?
2. Dans ce cadre, les vecteurs u et v sont orthogonaux à quelle condition ?
3. Si $x = x_F + x_{F^\perp}$, que vaut le symétrique orthogonal de x par rapport à F ?
4. La matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale a quelle particularité ?

Réponses

1. E est un espace vectoriel euclidien si il a quelles caractéristiques ?
   De dimension finie et muni d'un produit scalaire.
2. Dans ce cadre, les vecteurs u et v sont orthogonaux à quelle condition ?
   Si leur produit scalaire est nul.
3. Si $x = x_F + x_{F^\perp}$, que vaut le symétrique orthogonal de x par rapport à F ?
   $s(x) = x_F - x_{F^\perp}$
4. La matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale a quelle particularité ?
   Elle est symétrique (par rapport à la première diagonale).