Séries numériques

Plan

Définitions

Définition

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

La série de terme général u_n est l'addition de tous les u_n de $n = n_0$ à $+\infty$:

$$\sum_{n \geqslant n_0} u_n$$

$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est la somme partielle de rang N de la série.

Définition

La série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente si

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = S \quad \in \mathbb{R}$$

la somme de la série est alors

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Sinon, la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est divergente.

Exemples :

1. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n$?

2. La série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$ converge $\Leftrightarrow \alpha \in]-1;1[$.
    - $\sum_{n\geqslant 0} 2^n$ diverge
    - $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge
    - $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge

Propriété.

Si la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Si la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge.

Exercice

(TD) Soit u_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\arctan \frac{\operatorname{ch} n}{4}\right)^2$$

Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$.

(u_n) converge vers 0 n'est pas suffisant pour dire que la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente !

Exemple : étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Théorème.

1. Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ convergent alors $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + \lambda v_n)$ converge

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ diverge , alors $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + v_n)$ diverge

Remarque : Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur $\sum_{n \geqslant n_0} (u_n + v_n)$.

série téléscopique

Soit $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

La série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (v_{n+1} - v_n)$ est téléscopique

Technique : Etude de la convergence de la série.

Exemple : Nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Plan

Comparaison avec une intégrale impropre

Théorème.

f une fonction continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Application : les séries de Riemann

Théorème.

La série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$

Démonstration.

- Si $\alpha \leqslant 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \not\to 0$. Donc la série est divergente.
- Si $\alpha > 0$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est continue positive et décroissante sur $[1; +\infty[$, limite nulle. La série et l'intégrale sont de même nature :
$$\sum n \geqslant 1 \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Comparaison de deux séries

Théorème.

(u_n) et (v_n) suites positives et

$$\forall n \geqslant N, \qquad u_n \leqslant v_n$$

- Si $\sum\limits_{n \geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente.
- Si $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est divergente, alors $\sum\limits_{n \geqslant n_0} v_n$ est divergente.

Exemples :

1. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{\sqrt{n^4 + n + 1}}$.
2. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}\right)$.

Règles de l'équivalent et du o

Théorème.

(u_n) et (v_n) suites positives

Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ sont de même nature.

Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Exemple : Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice

Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$.

La règle de D'Alembert

Théorème.

$\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ une série à termes strictement positifs et telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$$

- Si $\ell < 1$, alors $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

Exemple : Avec $\ell = 1$. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ série convergente et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ série divergente

Exemple : Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice

Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$.

Plan

Définition

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est $\boxed{\text{absolument convergente}}$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n \geqslant n_0} |u_n| \text{ est convergente.}$$

Théorème.

Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Exemple : Donner la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Remarque : Une série peut-être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Plan

Définition

Un série alternée est de la forme

$$\sum_{n \geqslant n_0} (-1)^n a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n \geqslant n_0} (-1)^{n+1} a_n$$

avec (a_n) une suite à termes positifs.

Théorème. spécial pour certaines séries alternées

Si $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

1. La série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^n a_n$ ou $\sum\limits_{n \geqslant n_0} (-1)^{n+1} a_n$ converge vers une limite S.
2. pour tout $N \geqslant n_0$, la somme S est comprise entre S_N et S_{N+1}.
3. Le signe de S est celui du terme 0.

Exemple : étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Et il en reste quoi ?

1. Dire que la série de terme général (u_n) converge signifie que....
2. Si la suite (u_n) tend vers 0, que peut-on dire sur la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$?
3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{\frac{1}{3}}$ est-elle convergente ou divergente ?
4. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ est-elle convergente ou divergente ?
5. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente, que dire de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$?

Réponses

1. Dire que la série de terme général (u_n) converge signifie que.... $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ converge vers un réel quand $N \to +\infty$.
2. Si la suite (u_n) tend vers 0, que peut-on dire sur la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$? Rien du tout ! !
3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{\frac{1}{3}}$ est-elle convergente ou divergente ? Divergente.
4. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ est-elle convergente ou divergente ? Convergente.
5. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente, que dire de $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$? Divergente aussi.