Espaces vectoriels de dimension finie
(2)

Plan

E espace vectoriel de dimension finie n.

F espace vectoriel (pas toujours de dimension finie).

Théorème.

- $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E
- $(e'_1, \ldots, e'_n)$ une famille de F.

Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f(e_k) = e'_k.$$

Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Pour $x \in E$

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \qquad \to \qquad f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)$$

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_n e'_n$$

Propriété.

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. f et g deux applications linéaires de E dans F. Si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f(e_k) = g(e_k)$$

alors f et g sont égales $(\forall x \in E,\ f(x) = g(x))$.

Deux applications linéaires qui sont égales sur une base sont égales partout.

Corollaire.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. $f : E \to F$ application linéaire.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Remarque : Il étudier si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre pour savoir si c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$

Exemple : On considère f linéaire de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(a + ib) = i(a + 2b)$$

$$f(1) = i, \quad f(i) = 2i \quad \Rightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{i, 2i\} = \mathrm{Vect}\{i\}$$

Donc $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 1.

Exercice

On se place sur les espaces vectoriels $E = \mathcal{C}$ et $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considères l'application

$$\begin{array}{rcl} u : E & \to & F \\ z = a + ib & \to & f(t) = (a+b)e^t + (a-b)e^{2t} \end{array}$$

Determiner une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Notion : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f une application linéaire de E dans F, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Théorème. Théorème du rang

$f : E \to F$ application linéaire

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Remarque : $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est le rang de f.

Théorème.

$f : E \to F$ application linéaire

1. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Leftrightarrow f$ est injective.
2. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow f$ est surjective.
3. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Leftrightarrow f$ est bijective.

Plan

Propriété.

L 'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}$ des matrices $n \times m$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $n \times m$.

On note $E_{i,j}$ la matrice de taille $n \times m$ où tout les coefficients sont nuls SAUF le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1.

La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de passage

E de dimension finie n.

Définition

$\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de la famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$. Elle est formée en mettant côte à côte en colonne les coordonnées de $v_1, \ldots, v_p$ dans la base $\mathcal{B}$

Exercice

(TD) Écrire la matrice de la famille

$$\mathcal{F} = \left(1, X, \frac{X(X+1)}{2}, \frac{X(X+1)(X+2)}{6}\right)$$

dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Définition

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Elle est formée en mettant en colonne et côte à côte les coordonnées (exprimés dans la base $\mathcal{B}$) des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Exemple : On se place dans $\mathbb{C}$ de dimension 2 avec la base $\mathcal{B} = (1, i)$. $\mathcal{B}'(1+i, 2-2i)$ une autre base de $\mathcal{C}$

Les coordonnées de $1+i$ dans $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et les coordonnées de $2-2i$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriété.

x vecteur de E,

- $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$
- $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}'$

Alors

$$X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{B}, \underbrace{\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'},} \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}'} = (P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

Propriété.

1. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ trois bases de E

$$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$

2. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Matrice d'une application linéaire

Définition

$\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
$u : E \to F$ une application linéaire.

1. Calcul de $u(e_1), \dots, u(e_p)$ image des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u
2. Calcul des coordonnées de $u(e_1), \dots, u(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}_F$
3. On met ces coordonnées en colonne, dans l'ordre, et côte à côte.

On obtient la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$$

Si u est un endomorphisme de $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. La matrice est alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u par rapport à $\mathcal{B}$

Exemple :

- $E = \mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{B}_E = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$
- $F = \mathbb{R}_1[X]$ avec $\mathcal{B}_F = (1, X)$

$$u : E \to F, \qquad u(a,b,c) = (a+3b)X + 2c$$

On calcule

$$u(1,0,0) = X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F} ; \quad u(0,1,0) = 3X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F} ;$$

$$u(0,0,1) = 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_F}$$

la matrice de u :

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

(TD) Ecrire la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$$

Propriété.

u de matrice $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.
$X \in E$ avec coordonnées $X_{\mathcal{B}_E} = (x_1, x_2, \dots)$ dans la base $\mathcal{B}_E$.

Les coordonnées du vecteur $u(X)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont

$$u(X)_{\mathcal{B}_F} = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times X_{\mathcal{B}_E}$$

Exemple : u de l'exemple précédent.

$$u(x,y,z)_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ x+3y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y,z) = 2z + (x+3y)X$$

Propriété.

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u+v) = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) + M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$$

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u) = \lambda M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$$

Remarque : il y a une correspondance (un isomorphisme)entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Les deux espaces ont donc même dimension.

Propriété.

Soit E dimension n et F dimension p

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F) = np.$$

Propriété.

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

La composition des applications linéaires se traduit sous forme de produit des matrices associées.

Propriété.

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible.

$$M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = (M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))^{-1}$$

Matrice d'un endomorphisme dans des bases différentes

Propriété.

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).M_{\mathcal{B}}(u).P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

Remarque : En notant

$$A = M_{\mathcal{B}}(u), \quad A' = M_{\mathcal{B}'}(u), \quad P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

on a

$$A' = P^{-1}A\ P, \qquad A = PA'P^{-1}$$

Et il en reste quoi ?

Soit E espace vectoriel de base $\mathcal{B}(u, v, w)$, F espace vectoriel de base $\mathcal{B}_F$ et f application linéaire de E dans F.

1. Si g est une autre application linéaire et que $f(u) = g(u)$, $f(v) = g(v)$ et $f(w) = g(w)$, que peut-on conclure ?
2. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, c'est quoi $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?
3. Qu'est-ce qu'il y a dans cette matrice ?
4. On note A la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_F$ d'une application linéaire f. Que vaut le produit AX avec X un vecteur exprimé dans la base $\mathcal{B}$?
5. Si on calcule $P^{-1}AP$, on obtient quoi ?

Réponses

1. $f = g$
2. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Il y a les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$.
4. $f(X)$ exprimé dans la base $\mathcal{B}_F$.
5. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$