# Espaces vectoriels de dimension finie (1)

Espace vectoriel $E$.

Famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'éléments de $E$ : L'ordre des éléments compte et on peut avoir plusieurs fois le même vecteur.

# Plan

## Définition

La famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est libre si

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$$

a pour seule solution $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
Les vecteurs de la famille sont linéairement indépendants.

La famille $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est liée si

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$$

a des solutions non nulles.
Un vecteur de la famille est une combinaison linéaire des autres.

**Exemples :** $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

$$\lambda_0 + \lambda_1 X^1 + \cdots + \lambda_n X^n = 0$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ces coefficients sont nuls. Donc les $\lambda_k$ sont tous nuls et la famille est libre.

$(\cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

$$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin = 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0$$

- Pour $x = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0$
- Pour $x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 0.$

## Définition

Une famille $(v_i)_{i\in I}$ (finie ou non) d'éléments de $E$ est dite générratrice de $E$ si tout élément de $E$ s'exprime comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de cette famille.

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ famille finie de $E$ est dite génératrice de $E$ si

$$E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Tout élément $u$ de $E$ s'écrit :

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

**Exemple :**

1. $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ car $z = a.1 + b.i$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ car

$$P = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n$$

3. La famille infinie $(X^i, i \in \mathbb{N})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$ puisque tout polynôme est une combinaison linéaire d'un nombre fini de monômes.

## Exercice

(TD) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$P = 2X^3 + X, \quad Q = X^2 - 3X, \quad R = X - 1$$

1. Montrer que la famille $(P, Q, R)$ est libre.
2. Peut-on trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$aP + bQ + cR = 4X^3 + X^2 + X - 1 \quad ?$$

3. Qu'en déduit-on pour la famille $(P, Q, R)$ ?

## Notions

- la famille est libre ssi l'équation $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$ a pour seule solution que les $\lambda_i$ sont tous nuls.
- la famille est génératrice ssi l'équation $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = u$ a au moins une solution pour tout vecteur $u$.

**Définition**

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de $E$ est une base de E si elle est libre et génératrice de $E$.

**Théorème.**

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les coordonnées (composantes) de $x$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Exemple :**

1. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$. Les coordonnées de $z$ dans la base $(1, i)$ sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Dans le plan, deux vecteurs non colinéaires forment une base.
3. Dans l'espace, trois vecteurs non coplanaires forment une base.
4. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

# Plan

## Définition

Un espace vectoriel $E$ est de dimension finie si il a une famille génératrice finie.

Sinon, $E$ n'est pas de dimension finie.

**Exemple :**

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
- $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

**Théorème.**

$E$ de dimension finie possède au moins une base.

Toute famille génératrice finie de $E$ contient une base de $E$.

### Démonstration.

- $\mathcal{F}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice finie de $E$. Si $\mathcal{F}_1$ est libre, alors c'est une base de $E$, sinon, l'un des vecteurs (par exempe $e_n$) de la famille est une combinaison linéaire des autres.
- $\mathcal{F}_2 = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une famille génératrice finie de $E$ de $E$.
- et on recommence au debut

On continue à retirer des vecteurs jusqu'à ce que la famille obtenue soit libre. Donc c'est une base de $E$.

**Définition**

$E(\neq \{0\})$ de dimension finie, alors toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments : la dimension de $E$

L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.

**Exemples :**

1. $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n$.
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ .
   La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$, qui contient $n+1$ vecteurs.
3. L'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'a pas de base, donc pas de dimension.

## Exercice

(TD) On considère

$$F = \mathrm{Vect}(2X+1; \quad 3X-2; \quad 5X-1)$$

Quelle est la dimension de $F$ ?

**Notions**

1. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur dans une base de cet espace.
2. Une base est une famille libre et génératrice de cet espace

**Théorème.**

$E$ de dimension $n$.

1. Une famille libre a au plus $n$ éléments.
   $\rightarrow$ Si une famille libre a exactement $n$ éléments, c'est une base.
2. Une famille libre peut être complétée en une base.
3. Une famille génératrice de $E$ a au moins $n$ éléments.
   $\rightarrow$ Si une famille génératrice a exactement $n$ éléments, c'est une base.
4. Une famille génératrice de $E$ contient une base.

**Remarque :** libre $\leqslant$ dimension $=$ base $\leqslant$ génératrice.

# Plan

**Théorème.**

$E$ de dimension finie.
$F$ sous-espace vectoriel de $E$ est de dimension finie.

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

**Démonstration.** $n$ la dimension de $E$.

- Si $F = \{0\}$, alors $F$ est de dimension 0.
- Sinon, il y a $f_1 \in F$ un vecteur non nul. Donc $(f_1)$ est libre
  - si $F = \mathrm{Vect}(f_1)$, $\rightarrow \dim(F) = 1$.
  - Sinon il y a $f_2 \in F$ non colinéaire à $f_1$. Donc $(f_1, f_2)$ est libre.
    - si $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, $\rightarrow \dim(F) = 1$.
    - sinon ....

On ajoute des vecteurs à la famille jusqu'à arriver à $(f_1, \ldots, f_p)$ libre et génératrice de $F$, donc base de $F$ .

**Exemple :** $\mathbb{C}$ est de dimension 2 car une base est $(1, i)$.
Le s.e.v des imaginaires purs a pour base $(i)$ donc il est de dimension 1.

**Remarque :** Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie peut contenir des s-e-v de dimension finie.

**Exemple :** L'ensemble des fonctions réelles n'a pas de dimension.
Soit $S$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y" - 1 = 0$

$$S = \left\{ y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{t}, \quad A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = \text{Vect}\{(e^{-t}, e^{t})\}$$

$S$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

**Corollaire.**

$E$ de dimension finie. $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$

$$F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G) \qquad \Longrightarrow \qquad F = G.$$

# Plan

**Théorème.**

$E$ de dimension finie et $F$ sous-espace vectoriel de $E$.
Il existe un sous-espace vectoriel $G$ tel que $F$ et $G$ soient supplémentaires.

**Remarque :** Si $F$ et $G$ sont supplémentaires, alors

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

**Théorème.**

$F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension finie $n$.

1. Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0\}$, alors $F$ et $G$ sont supplémentaires.

2. Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$, alors $F$ et $G$ sont supplémentaires.

---

Dans tous les cas, on obtient une base de $E$ en réunissant une base de $F$ et une base de $G$.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $G = \text{Vect}(X^n)$ sont supplémentaires.

### Exercice

On se place dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique $\mathcal{B}$.
Soient les vecteurs $\vec{u} = (2, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 3)$.
On note

$$U = \mathrm{Vect}(\vec{u}), \qquad V = \mathrm{Vect}(\vec{v})$$

Montrer que $U$ et $V$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

**Théorème.**

$E$ dimension finie. $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

# Et il en reste quoi ?

1. On a trois vecteurs de $E$ tels que $2u - 3v + w = \vec{0}$. La famille $(u, v, w)$ est-elle libre ou liée ? Génératrice ou non ?
2. Un espace vectoriel de dimension 4 possède-t-il une famille libre de 5 vecteurs ?
3. Si $E$ est de dimension 3 et que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, quelle peut être la dimension de $F$ ?
4. Si $F$ et $G$ sous deux sous espaces vectoriels de $E$ tel que la somme de leur dimension est égale à celle de $E$ et que leur intersection ne contiennent que le vecteur nul, que peut-on dire ?

# Réponses

1. Liée. Mais on ne sait rien sur génératrice.
2. Non, ça doit être 4 vecteurs au maximum pour libre.
3. Dimension 0, 1, 2 ou 3.
4. $F$ et $G$ sont supplémentaires.