Plan

1. Intégrales impropres

Dans quelle situation parler d'intégrale impropre ?

Si f pose problème en une borne finie de l'intervalle d'intégration ou a une borne infinie

Cas simple

- f continue sur $[a, b[$ et $\lim_{b} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ prolongement $\tilde{f}$ par continuité de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x.$$

- f continue sur $]a, b]$ et $\lim_{a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Idem

Exemple :

Les cas compliqués

$\lim_b f$ ou $\lim_a f$ n'existe pas ou est infini

Exemples :

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

la fonction inverse tend vers $+\infty$ en 0^+

$$\int_0^{\pi/2} \cos \frac{1}{t} dt$$

$\cos(1/t)$ n'a pas de limite en 0

L'intervalle d'intégration n'est pas borné : $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

Exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} t dt$$

Intégrales convergentes ou divergentes

Définition

f continue sur $[a, b[$ (b réel ou infini)

L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \in \mathbb{R}$$

Si la limite n'est pas finie ou n'existe pas, l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Définition

f continue sur $]a, b]$ (a réel ou infini).

L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t \quad \in \mathbb{R}$$

Si la limite n'est pas finie ou n'existe pas, l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Définition

f continue sur $]a, b[$ (a, b réels ou infinis).

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes (avec $c \in]a, b[$) .

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

les intégrales de Riemann

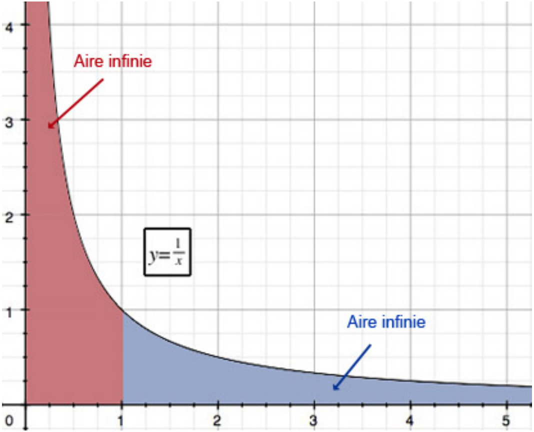
Propriété.

$a \in \mathbb{R}$, α un réel. une borne $b > 0$

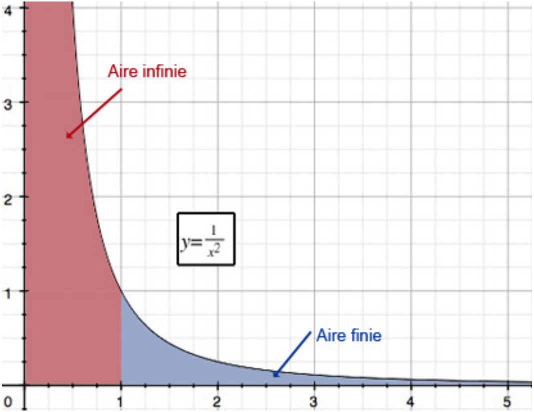
- $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est convergente $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 1.$
- $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est convergente si $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 1.$
- $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha < 1.$
- $\displaystyle\int_.^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 1.$

Démonstration.

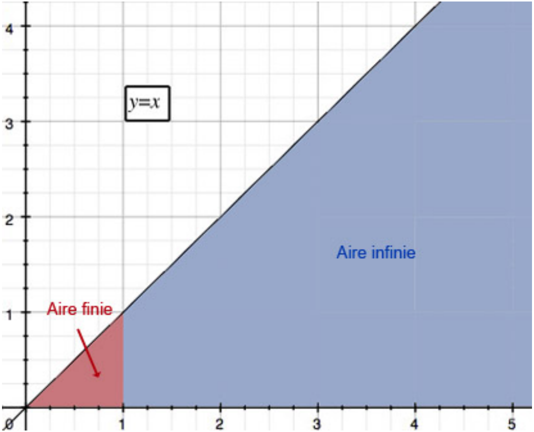
Pour $f(t) = \frac{1}{t}$ $(\alpha = 1)$: $\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ divergent toute les deux.



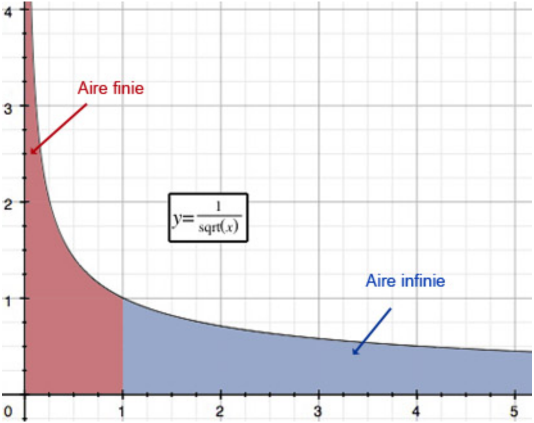
Pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$ $(\alpha = 2)$: $\int_0^1 \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ diverge et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge.



Pour $f(t) = t$ $(\alpha = -1)$: $\int_0^1 t\mathrm{d}t$ converge et $\int_1^{\infty} t\mathrm{d}t$ diverge.

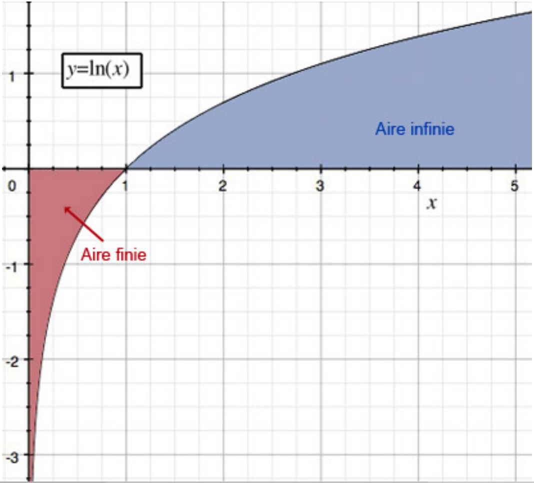


Pour $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ $(\alpha = 1/2)$: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ converge et $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ diverge.

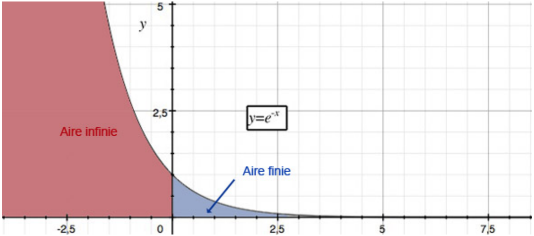


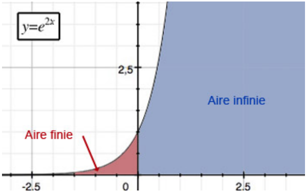
Autres exemples :

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$ est divergente.



- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\,dt$ est convergente pour $\alpha < 0$ et divergente pour $\alpha \geqslant 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,dt$ est divergente pour $\alpha < 0$ et convergente pour $\alpha \geqslant 0$.





Théorème.

f et g continues sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$, ou $]a, b[$) et λ un réel.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent,

alors $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

Intégrales des fonctions positives

a et b réels ou $\pm\infty$.

Théorème.

f et g continues, positives sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$ ou $]a, b[$) et

$$\forall t \text{ proche du problème,} \qquad f(t) \leqslant g(t)$$

alors :

1. Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi.
2. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Exemples :

- étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
- étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{t} + \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$.

Théorème.

f et g continues, positives sur $[a, b[$ et

$$f \underset{b}{\sim} g$$

- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge.
- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge $\Leftrightarrow \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque : Même principe si le problème est a.

Exemple : étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan(t)}}$.

Exercice

étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1/\pi}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Théorème.

f et g continues, positives sur $[a, b[$ et

$$f = \underset{b}{o}(g)$$

Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge

Remarque : Même principe si le problème est a.

Exemple : Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$.

Intégrales absolument convergentes

Définition

f continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$, ou $]a, b[$).

L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

$\rightarrow$ f est intégrable sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$, ou $]a, b[$).

Remarque :

1. f positive dont l'intégrale converge $\rightarrow$ intégrable.
2. f change de signe f $\rightarrow$ étude de $\int |f|$

Théorème.

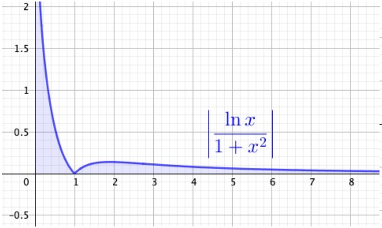
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

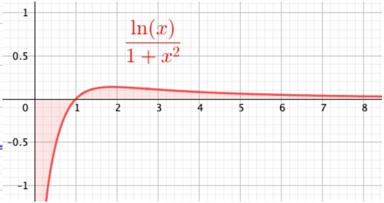
si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Utilité :

1. $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge (théorèmes des fonctions positives)
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Donc elle converge

Exemple : étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

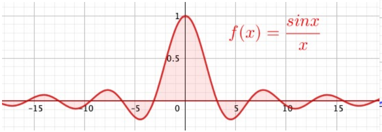


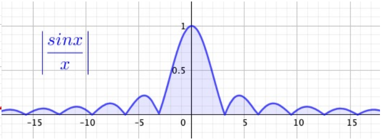


Il existe des fonctions f telles que
$\int f$ converge mais $\int |f|$ diverge !

Exemple : la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ n'est pas convergente.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ converge





Propriété.

$I =]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$, avec a, b réels ou infini

1. **Linéarité** : Si f et g sont intégrables sur I, alors $f + \lambda g$ est intégrable sur I

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g.$$

2. **Relation de Chasles** : Si f intégrable sur deux intervalles I et J raccordés en un seul point, alors f est intégrable sur $I \cup J$ et :

$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f.$$

Propriété.

f une intégrable sur I :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Dans les intégrales impropres :

1. changements de variables possibles
2. intégration par parties possibles avec précaution !

Etude de la nature d'une intégrale

On veut étudier $\int_a^b f(x)dx$ avec f définie sur $[a, b[$ (b réel ou infini).

$$\text{Si } \lim_{x\to b} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

1. si b réel : f est prolongeable par continuité sur $[a, b]$, donc $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est convergente
2. Si $b = +\infty$
   - Si $\ell \neq 0$, $f \sim \ell$ en $+\infty$ et $\int^\infty \ell = \infty$ diverge, donc $\int_a^b f(x)dx$ diverge.
   - Si $\ell \neq 0$.
     Comparer $(\leqslant, \sim, o)$ $|f|$ à une fonction g du cours (exp, ln ou $\frac{1}{t^\alpha}$) telle que $\int_a^b g$ converge. Donc $\int_a^b |f|$ converge, puis $\int_a^b f$ converge.

Si $\lim_{x\to b} f(x) \quad = \quad \pm\infty$

1. si b réel : Comparer $(\leqslant, \sim, o)$ $|f|$ à une fonction g du cours (exp, ln ou $\frac{1}{t^\alpha}$) telle que $\int_a^b g$ converge. Donc $\int_a^b |f|$ converge, puis $\int_a^b f$ converge.
2. Si $b = +\infty$.
   - $f \geqslant 1$ en ∞ et $\int_a^\infty 1$ est divergente. Donc $\int_a^\infty f$ est divergente
   - $-f \geqslant 1$ en ∞ et $\int_a^\infty 1$ est divergente. Donc $-\int_a^\infty f$ est divergente

Si la limite de $f(x)$ pour $x \to b$ n'existe pas

Comparer $(\leqslant, \sim, o)$ $|f|$ à une fonction g du cours (exp, ln ou $\frac{1}{t^\alpha}$) telle que $\int_a^b g$ converge. Donc $\int_a^b |f|$ converge, puis $\int_a^b f$ converge.

Si rien de tout ça ne marche.

On calcule explicitement $\displaystyle\int_a^x f$ avec $x < b$. Puis on étudie la limite quand $x \to b$.

Ne pas mélanger
fonction convergente et intégrale convergente !

Et il en reste quoi ?

1. Si une fonction f est continue sur $]1,2]$ et prolongeable par continuité en 1, est-ce que l'intégrale $\int_1^2 f(x)dx$ existe ?
2. Lesquelles de ces intégrales sont convergentes ?

$$\int_0^1 \frac{1}{t^3}dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$$

3. Si f et g sont deux fonctions positives telles que $f \sim g$ quand $x \to +\infty$ et que g est intégrable sur $[1,+\infty[$, que peut-on dire sur $\int_1^{+\infty} f(x)dx$?
4. Et si f n'est pas une fonction positive, que faut-il faire pour étudier la convergence de $\int_a^b f(x)dx$?

Réponses

1. Oui
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$
3. l'intégrale est convergente
4. On étudie la convergence de $\int_a^b |f(x)| dx$