Compléments d'intégration
(1)

Plan

Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition

l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ est

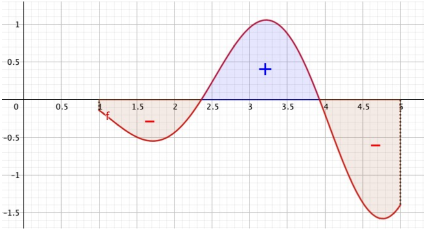
$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

avec F désigne une primitive de f sur $[a, b]$.

$$\int_{[a,b]} f = \text{aire algébrique du domaine délimité par}$$

- l'axe (Ox),
- la courbe représentative de f
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$,

les parties au dessus de l'axe (Ox) sont comptées positives et les parties en dessous négatives.



Lien avec la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriété.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f & \text{si } a \geqslant b. \end{cases}$$

Remarque : Dans toute la suite, on va supposer que $a < b$.

Propriétés de l'intégrale

Propriété.

$$\int_a^b (\lambda f + g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Propriété. (positivité)

Si f est positive sur le segment $[a, b]$, alors son intégrale sur $[a, b]$ est positive :

$$f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

Démonstration. F une primitive de f. Théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}, \quad \rightarrow \quad f(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (b - a)\underbrace{f(c)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Exercice

(TD) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Notion. Si f est une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$, alors son intégrale sur $[a, b]$ est positive,

Corollaire.

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Plan

Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition

Une subdivision de $[a, b]$ est une famille finie $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ strictement croissante d'éléments de $[a, b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Exemple : $\left(1; 2; \frac{5}{2}; 3,2; 4\right)$ est une subdivision de $[1, 4]$.

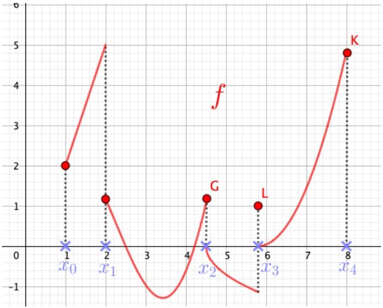
Définition

f est continue par morceaux :

- une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$
- f est continue sur $]x_{i-1},x_i[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ouverts
- prolongeable par continuité sur $[x_{i-1},x_i]$ fermés.

cette subdivision est adaptée à la fonction f.

Remarque : Une fonction continue est un cas particulier de fonction continue par morceaux.


K
f
G
L
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4

Propriété.

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors $\lambda f + g$ et fg sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

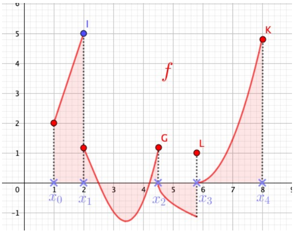
Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition

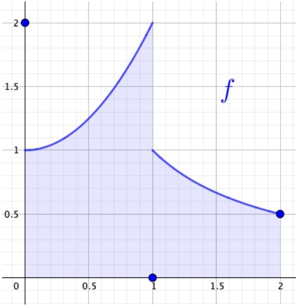
f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. on note f_i le prolongement par continuité de f sur le segment $[x_{i-1},x_i]$.

L' intégrale de f sur $[a,b]$ est

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,x_1]} f_1 + \int_{[x_1,x_2]} f_2 + \cdots + \int_{[x_{n-1},b]} f_n .$$



Exemple :



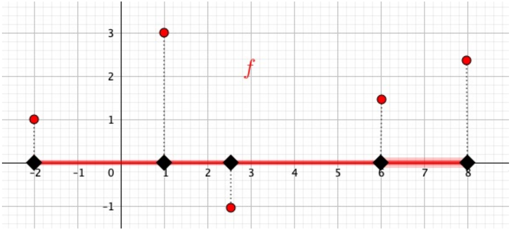
Remarque : Les propriétés de l'intégrale qui marchent encore : linéarité, positivité, croissance et relation de Chasles. Mais d'autres propriétés ne marcheront pas !

Théorème.

f continue positive sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$$

Par contre, une fonction positive et continue par morceaux sur $[a, b]$ peut être d'intégrale nulle sans être nulle sur tout le segment $[a, b]$



Plan

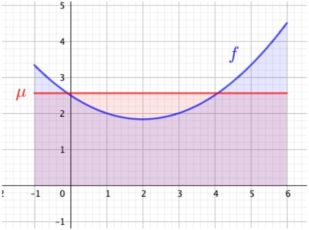
Valeur moyenne

Définition

f continue par morceaux sur $[a, b]$. La valeur moyenne de f est

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque : C'est la hauteur du rectangle qui a même aire que l'aire sous la courbe de f



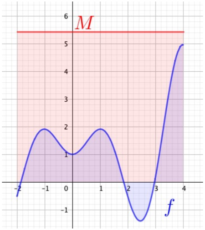
Propriété.

f et g continues par morceaux

$$|f| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant M \int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x$$

Inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant M(b-a).$$



Exercice

(TD) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$. Il existe M une constante telle que

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leqslant M$$

Soit g définie par

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Jusitfier que $\forall x \in [0, 1]$, $|g(x)| \leqslant Mx$

Notion. (Inégalité de la moyenne) Soit f fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et un majorant M de $|f|$ sur $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant M \cdot (b - a).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème.

f et g continues par morceaux sur $[a, b]$.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

Démonstration. On pose un polynôme en λ :

$$P(\lambda) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 \mathrm{d}x \quad \geqslant 0$$

Il est toujours positif.

$$= \lambda^2 \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) + 2\lambda \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

Il est de degré 2 au maximum.

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) + 2\lambda \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right) + \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = 0$, alors $deg(P) = 1$.
  fonction affine toujours positive $\rightarrow$ constante !
  Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$ et

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big)^2 = 0 = \Big(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\Big).$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \right) + 2\lambda \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right) + \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \right)$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \neq 0$
  P trinôme du second degré toujours positif donc $\Delta \leqslant 0$

$$\Delta = 4\left(\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \right) \right) \leqslant 0$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \right)$$

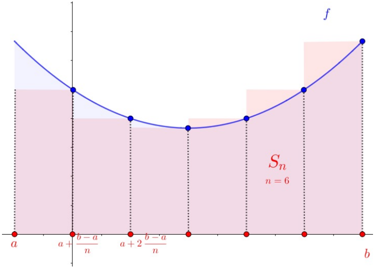
Plan

Définition

f continue et $n > 0$. On partage $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$.

La somme de Riemann est

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$



Remarque : On peut trouver des variantes avec $\sum_{k=0}^{n}$ ou $\sum_{k=0}^{n-1}$.

Propriété.

Pour $a = 0$ et $b = 1$, la somme de Riemann

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Le tout étant de bien choisir $f(x)$.

Théorème.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

sommes de Riemann,

- calculer des valeurs approchées d'intégrales
- limite de certaines suites

.

Exemple : Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$$

Et il en reste quoi ?

1. Graphiquement, $\int_1^2 x^2 dx$ représente quoi ?
2. Si f est une fonction positive, que peut-on dire sur son intégrale de 0 à 1 ?
3. Si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, alors la fonction est nulle. Cette propriété marche à quelle condition sur la fonction ?
4. Si $|f| < M$ sur $[a, b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant ?$

Réponses

1. L'aire sous la courbe de x^2, entre les abscisses 1 et 2.
2. C'est un nombre positif.
3. Si la fonction est continue.
4. $M(b-a)$