Espaces vectoriels
(2)

Plan

Définition

E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.
$f : E \to F$ est une application linéaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F

Remarque :

$$f(0_E) = 0_F \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ f(-x) = -f(x).$$

Exercice

(TD) Montrer que l'application f suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Définition

- Un endomorphisme de E une application linéaire de E dans E. L'ensemble des endomorphismes de E est $\mathcal{L}(E)$.
- Une forme linéaire de E une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

1. La dérivation $D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}). \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est une application linéaire.

   Démonstration.

2. a, b des réels et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & ax + by \end{array}$$

   f est une forme linéaire.

3. l'application identité

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

   est une application linéaire.

Théorème.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E, F)$.
Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Noyau et image d'une application linéaire

Définition

f une application linéaire de E dans F.
Le noyau de f est

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

L' image de f est

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F,\ \exists x \in E, f(x) = y\} = f(E).$$

Remarque : La rédaction pour trouver un noyau ou une image n'a pas changé :

- Noyau : Soit x un élément quelconque de E.

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_F$$

Et on résout pour trouver x

- Image : Soit y un élément quelconque de F.

$$y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \text{ il existe } x \in E, \quad f(x) = y$$

On cherche les conditions sur y pour pouvoir résoudre.

Théorème.

$f : E \to F$ une application linéaire

1. $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple :

$$U : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'' \end{array}$$

Montrer que U est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice

(TD) Déterminer le noyau et l'image de

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Notions.

- **Noyau** : Soit x un élément quelconque de E. On a : $x \in \mathrm{Ker}(f)$ si, et seulement si, $f(x) = 0_F$. Et on résout.
- **Image** : Soit y un élément quelconque de F. On a $y \in \mathrm{Im}(f)$ si, et seulement si, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Et on cherche **les conditions sur** y pour pouvoir résoudre.

Définition

- Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.
- Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E (application linéaire bijective de E dans E).

Propriété.

f une application linéaire de E vers F.

1. f est injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$.
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = F$.

Composition des applications linéaires

Théorème.

Si f et g sont des applications linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire.

Théorème.

f un isomorphisme de E dans F.

- Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
- $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in F$
- $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$.

Plan

L'homothétie vectorielle

L'homothétie vectorielle de rapport k

$$\begin{array}{rccc} h_k: & E & \to & E. \\ & x & \mapsto & kx \end{array}$$

Les projecteurs

Définition

F et G supplémentaires dans E.

La projection p sur F parallèlement à G est

$$x = x_F + x_G \quad \mapsto \quad p(x) = x_F$$

Propriété.

La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E

$$\mathrm{Im}(p) = F, \qquad \mathrm{Ker}(p) = G \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F,\ p(x) = x.$$

Symétries

Définition

F et G supplémentaires dans E.

La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est

$$x = x_F + x_G \quad \mapsto \quad s(x) = x_F - x_G$$

Remarque : La symétrie s est un automorphisme de E et s est sa propre réciproque.

Plan

Définition

E et F espaces vectoriels. Une équation linéaire est $u(x) = b$ avec u une application linéaire de E dans F, b un élément de F (second membre)

L' équation homogène associée est $u(x) = 0$. Ses solutions sont $\text{Ker}(u)$.

Exemple : L'équation différentielle

$$y'' + xy' - y = \sin(x)$$

est linéaire. $E = F = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application linéaire $u : f \mapsto f'' + xf' - f$ et le second membre est sinus. L'équation homogène associée est $y'' + xy' - y = 0$.

Théorème.

E et F espaces vectoriel et $u : E \to F$ application linéaire.

S l'ensemble des solutions de l'équation linéaire

$$u(x) = b$$

- Si $b \notin \mathrm{Im}(u)$, alors $S = \varnothing$.
- Si $b \in \mathrm{Im}(u)$, alors

  $$S = \left\{x_0 + x,\ x \in \mathrm{Ker}(u)\right\}$$

  où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Et il en reste quoi ?

1. Si f est une application linéaire, $f(\lambda x + y) = \cdots$?
2. Quel est le début de la rédaction de la recherche du noyau de $f : E \to F$?
3. Quelle est la différence entre un isomorphisme et un automorphisme ?
4. Si $E = F \oplus G$, quelle est la projection de x sur G ?

Réponses

1. $\lambda f(x) + f(y)$
2. Soit $x \in E$. x est dans le noyau signifie $f(x) = 0_F$.
3. Dans l'isomorphisme, l'ensemble de départ et d'arrivée peuvent être différent.
4. Si $x = x_F + x_G$, alors sa projection est x_G.