Espaces vectoriels

Plan

Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est :

- un ensemble E non vide.
- une « addition » dans E

$$u, v \in E \mapsto u + v \in E$$

- un « produit par un scalaire (nombre) »

$$\lambda \in \mathbb{R}, v \in E \mapsto \lambda v \in E$$

possédant huit propriétés $(EV1 - 8)$.

Pour le $+$

- (EV1)associatif :

$$(u+v)+w=u+(v+w).$$

- (EV2) élément neutre 0_E (ou 0) :

$$v+0_E=0_E+v=v$$

- (EV3) tout u de E a un symétrique $-u$ (opposé de u)

$$u+(-u)=0_E.$$

- (EV4) commutatif

$$u+v=v+u$$

Pour le produit par un scalaire

- (EV5)]distributivité

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v.$$

- (EV6) distributivité

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

- (EV7) associativité :

$$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v).$$

- (EV8) 1 est élément neutre :

$$1 \cdot v = v.$$

Exercice

(TD) On considère $E =]0, +\infty[$ que l'on munit d'une loi d'addition $\oplus$ définie par

$$\forall a, b \in E, \qquad a \oplus b = ab$$

La loi $\oplus$ vérifie-t-elle $(EV1)$ et $(EV2)$?

Notions.

(EV1) $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$.

(EV2) la loi $+$ possède un élément neutre noté 0_E tel que $\forall v \in E,\ v + 0_E = 0_E + v = v$.

Exemples à connaitre

- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.
- $(\mathcal{F}(D), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel.
  - $\mathcal{F}(D)$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur D.
  - $f+g$ la fonction définie par $\forall x \in D, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  - λf définie par $\forall x \in D, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Démonstration.

- $\mathbb{C}$ avec l'addition des complexes $(z + z')$ et la multiplication (λz) par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{R}[X]$ (polynômes) avec l'addition classique des polynômes et la multiplication d'un polynôme par un scalaire, est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

propriétés de calculs

Propriété.

1. multiplication par le nombre 0 : $0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_E$
2. multiplication par le vecteur nul : $\alpha \cdot 0_E = 0_E$
3. règle du produit nul :

$$\alpha \cdot u = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0_{\mathbb{R}} \text{ ou } u = 0_E$$

4. opposé : $(-1) \cdot u = -u$
5. $(\alpha - \beta) \cdot u = \alpha \cdot u - \beta \cdot u$
6. $\alpha \cdot (u - v) = \alpha \cdot u - \alpha \cdot v$

Définition

Une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Exemples :

Plan

$(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition

un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E :

1. $0_E \in F$.
2. stabilité

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in F, \qquad \lambda u + v \in F$$

$(F, +, \cdot)$ est alors un espace vectoriel.

Remarque :

1. Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel,
   - $(EV1-8)$

   OU
   - c'est un sous-espace vectoriel d'un plus ≪ gros ≫ espace vectoriel connu.

2. Si $0_E \notin F$, alors F n'est pas un s.e.v. de E.

3. Toute combinaison linéaire de vecteurs de F donne un vecteur de F.

Exemples :

- E et $\{0_E\}$ sont des s.e.v. de E
- $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R} = \{iy,\ y \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$.
- Une droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
- $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})$.

- $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel car sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ **Démonstration.**

- Les sous-espace vectoriels des cours précédents sur $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels

- Par contre $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ **Démonstration.**

Définition

Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 \dots, u_n$ est

$$\mathrm{Vect}(\{u_1, \dots, u_n\}) = \Big\{u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Exemples :

- La droite vectorielle engendrée par u est $\mathrm{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Le plan vectoriel engendré par u et v

$$\mathrm{Vect}(\{u, v\}) = \{\lambda u + \mu v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$,

$$\mathrm{Vect}(\{1\}) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Vect}(\{i\}) = i\mathbb{R},$$

$$\mathrm{Vect}(\{1, -1\}) = \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(\{1, i\}) = \mathbb{C}.$$

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ s'écrit comme un Vect, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice

(TD) Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère $P = 3X^2$ et $Q = 4X^3$.
Donner la forme générale d'un polynôme appartenant à $\mathrm{Vect}(P, Q)$.

Notion.

$$\mathrm{Vect}(\{u_1, \ldots, u_n\}) = \left\{u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n, \text{ avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}.$$

Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété.

F et G deux s.e.v. de E, alors

$$F \cap G = \{v \in E \mid v \in F \text{ et } v \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : La réunion NON !

Exemple : $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ n'est pas stable pas addition. $(1 + i) \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ alors que 1 et i appartiennent à $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition

F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
la somme de F et G est

$$F + G = \{u + v,\ u \in F,\ v \in G\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E, formés des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition

Deux sev F et G sont supplémentaires si tout vecteur de E peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

$$E = F \oplus G$$

Théorème.

F et G sont supplémentaires ssi

$$F + G = E \qquad \text{et} \qquad F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple : $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Et il en reste quoi ?

1. Si E est un espace vectoriel, comment vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Si u et v sont deux vecteurs de E, comment s'écrivent tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(u, v)$?
3. Si F et G sont des sous-espace vectoriels de E, lesquels de ces ensembles sont aussi des sous-espaces vectoriels ?

$$F \cap G, \quad F \cup G, \quad F \backslash G, \quad F + G, \quad \bar{G}$$

4. Dire que F et G sont deux sous-espace supplémentaire signifie que...

Réponses

1. On vérifie que 0_E est dans F et que F est stable par addition et multiplication par une constante.
2. $au + bv$ avec a, b des réels.
3. $F \cap G$ et $F + G$.
4. Tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G