Courbes paramétrées

en coordonnées cartésiennes

1 Définition et exemple

2 Périodicité et Symétrie

3 Continuité et dérivabilité

4 Points réguliers et stationnaires

5 Etude asymptotique

6 Longueur d'une courbe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}$

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Plan

1. Définition et exemple
2. Périodicité et Symétrie
3. Continuité et dérivabilité
4. Points réguliers et stationnaires
5. Etude asymptotique
6. Longueur d'une courbe

Définition

Une courbe paramétrée du plan est

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

La variable t est appelée paramètre, les fonctions x et y sont les fonctions coordonnées de la courbe paramétrée.
L'ensemble des points $M(t)$ du plan lorsque t parcourt I s'appelle le support de la courbe paramétrée.

On peut voir une courbe paramétrée comme la position d'un point mobile, le paramètre t étant le temps.

On peut aussi avoir une fonction vectorielle

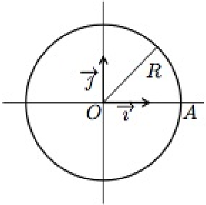
$$\begin{array}{rccl} \vec{f}: & I & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

reliant l'origine au point de coordonnées $(x(t), y(t))$. C'est le vecteur position.

Exemple : Dans la pratique, on définit x et y.

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases} \quad (t \in [0; 2\pi[)$$

a pour support le cercle de centre O et de rayon R, parcouru une fois dans le sens trigonométrique, en partant du point $A(R, 0)$.



Remarque : Deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support.

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{array}\right. , \quad t \in [0; 2\pi[$$

représente le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = -\sin(2t) \end{array}\right. , \quad t \in [0; 4\pi[$$

représente le cercle unité parcouru 4 fois dans le sens indirect.

Plan

1 Définition et exemple

2 Périodicité et Symétrie

3 Continuité et dérivabilité

4 Points réguliers et stationnaires

5 Etude asymptotique

6 Longueur d'une courbe

$\rightarrow$ réduire l'intervalle d'étude de f

Périodicité : Si

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$ f parcourt plusieurs fois son support $\rightarrow$ d'étudier et tracer la courbe sur un intervalle de longueur T.

Exemple :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

a une périodicité de 2π. On l'étudie et on la trace pour $t \in [-\pi, \pi]$ par exemple.

Exercice

(TD) Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée Γ définie par

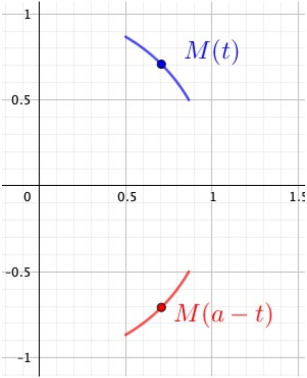
$$M(t) \begin{cases} x(t) = \sin 2t, \\ y(t) = \sin 3t. \end{cases}$$

Vérifier que Γ est 2π périodique et en déduire un intervalle d'étude de la fonction.

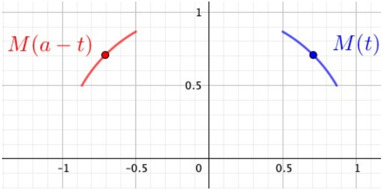
Notions Si il existe une période T telle que pour tout $t \in I$, $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe paramétrée parcourt plusieurs fois son support. Il suffit donc d'étudier et de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T.

Symétrie : Soit a un réel. Pour $t \in [\frac{a}{2}, +\infty[\cap I$: deux points $M(t)$ et $M(a-t)$

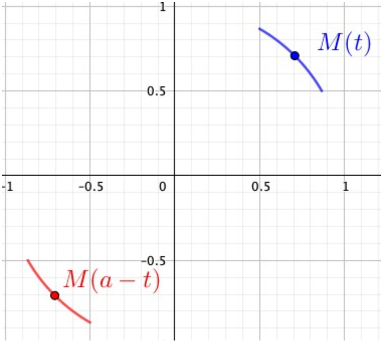
- Si $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie d'axe (Ox).



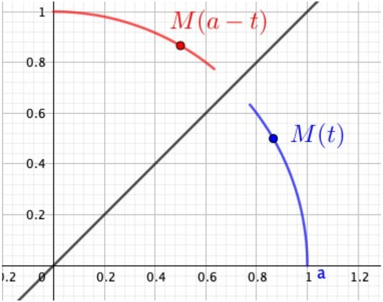
Si $\begin{cases} x(a-t) = -x(t) \\ y(a-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie d'axe (Oy).



Si $\begin{cases} x(a-t) = -x(t) \\ y(a-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie de centre O.



Si $\begin{cases} x(a-t) = y(t) \\ y(a-t) = x(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie d'axe $y = x$



En cas de symétrie :

- on coupe l'intervalle d'étude en deux en $t = \frac{a}{2}$
- on étudie la courbe sur une des deux moitiés
- on trace le reste de la courbe grâce à la symétrie.s

Remarque : La parité est le cas particulier où $a = 0$.

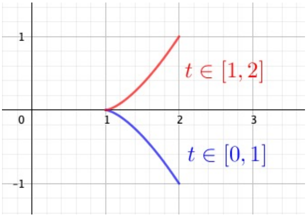
Exemple : On considère la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = (t-1)^2 + 1 \\ y(t) = (t-1)^3 \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0,2]$$

On a

$$\begin{cases} x(2-t) = (2-t-1)^2 + 1 = (1-t)^2 + 1 = (t-1)^2 + 1 & = x(t) \\ y(2-t) = (2-t-1)^3 = (1-t)^3 = -(t-1)^3 & = -y(t) \end{cases}$$

Donc la courbe présente une symétrie d'axe (Ox) et il suffit de couper l'intervalle d'étude en $\frac{2}{2} = 1$. Donc on étudie la courbe sur $[0,1]$ et on trace l'autre partie par symétrie.



Exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée Γ définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$M(t) \begin{cases} x(t) = \sin 2t, \\ y(t) = \sin 3t. \end{cases}$$

Etudier la parité des fonctions x et y et en déduire une symétrie de la courbe. Comment peut-on réduire l'intervalle d'étude ?

Notions Si $\begin{cases} x(a-t) = -x(t) \\ y(a-t) = -y(t) \end{cases}$, alors la courbe a une symétrie de centre O. Dans ce cas, on coupe l'intervalle d'étude en deux en $t = \frac{a}{2}$

Plan

1 Définition et exemple

2 Périodicité et Symétrie

3 Continuité et dérivabilité

4 Points réguliers et stationnaires

5 Etude asymptotique

6 Longueur d'une courbe

Limite

Définition

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = (a, b)$$

$f(t)$ converge vers le point M_0 de coordonnées (a, b) lorsque t tend vers t_0

$$\Leftrightarrow$$

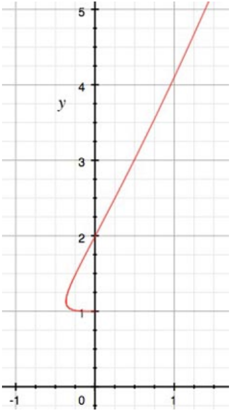
$x(t)$ converge vers a et $y(t)$ converge vers b

Exemple :

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in]0; +\infty[$$

Quand $t \to 0$, on a $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 1$ donc

$$\lim_{t \to 0} f(t) = (0, 1)$$



Continuité

Définition

$f(t)$ est continue en t_0 $\Leftrightarrow$ $x(t)$ converge vers $x(t_0)$ et $y(t)$ converge vers $y(t_0)$ lorsque $t \to t_0$.

f est continue sur I si elle est continue en tout point de I..

Exemple :

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in]0; +\infty[$$

f est continue sur $t \in]0; +\infty[$.

Dérivabilité

Définition

f est dérivable en t_0

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

C'est le vecteur dérivé de f *en* t_0.

Si f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on note f' la fonction dérivée.

Propriété.

f est dérivable en $t_0 \Leftrightarrow x$ et y sont dérivables en t_0

$$f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

Exemple :

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in]0; +\infty[$$

f est dérivable sur $t \in]0; +\infty[$ et sa dérivée est

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = \ln t + 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases}, \quad t \in]0; +\infty[$$

Définition

f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième notée $f^{(k)}$ est continue sur I.

Etude d'une courbe paramétrée : On étudie en même temps x et y

- ensemble de définition
- dérivée et tangentes
- tableau de variation $\rightarrow$ UN tableau pour les deux ! en alignant ce qui se passe "en même temps".
- limites et/ou asymptotes.
- Tracé

t		t_0		t_1		$\cdots$
$x'(t)$	$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	$\nearrow$	$x(t_0)$	$\nearrow$	$x(t_1)$	$\searrow$	
$y'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	
$y(t)$	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$y(t_1)$	$\searrow$	

x croissant signifie que la courbe va vers la droite. Et quand x est décroissant, elle va vers la gauche.

Interprétation cinématique

$M(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t.

- $\overrightarrow{OM(t_0)} = f(t_0)$ est le vecteur position à l'instant $t_0 \in I$.
- $f'(t_0)$ est le vecteur vitesse à l'instant t_0
- $f''(t_0)$ est le vecteur accélération à l'instant t_0.

Exemples :

Droites : une droite passant par $A(a, b)$ et dirigée par $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta)$

$$f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a + \alpha t \\ y(t) = b + \beta t \end{pmatrix}$$

$f'(t) = (\alpha, \beta) = \overrightarrow{v}$.

La même droite :

$$g : x \mapsto N(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a + 2\alpha t \\ y(t) = b + 2\beta t \end{pmatrix}$$

$g'(t) = (2\alpha, 2\beta) = 2\overrightarrow{v}$, deux fois plus vite !

Courbe d'une fonction numérique réelle

Une fonction $g(x)$: le graphe de g est le support de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathcal{D}_g).$$

Plan

1. Définition et exemple
2. Périodicité et Symétrie
3. Continuité et dérivabilité
4. Points réguliers et stationnaires
5. Etude asymptotique
6. Longueur d'une courbe

Définition

- $M(t_0)$ est régulier $\Leftrightarrow f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
  La tangente à ce point est la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.
- $M(t_0)$ est stationnaire $\Leftrightarrow f'(t_0) = \overrightarrow{0}$.

Remarque : Un point stationnaire est un point d'arrêt sur la trajectoire.

n point stationnaire ($f'(t_0) = \overrightarrow{0}$), recherche de tangente :

- la limite de $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ est la pente de la tangente.
- le développement limité en t_0 de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 2 au minimum. la première puissance non nulle à partir de l'ordre 2 $\rightarrow$ vecteur tangent

Exemple : En 0, $x(t) = 1 + 3t^3 + 2t^4 + o(t^4)$ et $y(t) = -1 + 5t^4 + o(t^4)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + o(t^4)$$

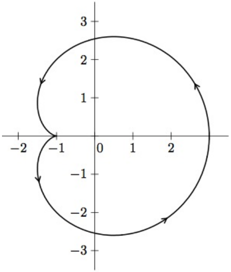
$M(0) = (1, -1)$. Vecteur directeur de la tangente :$\vec{v}(3, 0)$

Exercice

On considère la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - 2\cos(t/2) \\ y(t) = \sin t - 2\sin(t/2) \end{cases} \qquad (t \in [0, 4\pi]).$$

Déterminer les vecteurs directeurs des tangentes $\mathcal{T}$ en $t_0 = \pi$ et $\mathcal{T}'$ en $t_1 = 0$ et tracer ces tangentes.



Plan

1. Définition et exemple
2. Périodicité et Symétrie
3. Continuité et dérivabilité
4. Points réguliers et stationnaires
5. Etude asymptotique
6. Longueur d'une courbe

Définition

t_0 une extrémité de I n'appartenant pas à I

- Si $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \end{cases}$, alors le point $L(x_0, y_0)$ est un point limite de la courbe
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$, la courbe paramétrée a une branche infinie en t_0.

branche infinie en $t \to t_0$

Si $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \end{cases}$, alors asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty \end{cases}$, alors asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

branche infinie en $t \to t_0$

Si $\lim_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$.

$$\frac{y(t)}{x(t)} \to \cdots$$

1. si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$, alors $\boxed{\text{branche parabolique de direction } (Oy)}$
2. si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors $\boxed{\text{branche parabolique de direction } (Ox)}$
3. si $\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

$$y(t) - ax(t) \to \cdots$$

branche infinie en $t \to t_0$

1. si $y(t) - ax(t)$ n'a pas de limite, $y = ax$ est
une direction asymptotique
2. si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \infty$, alors
branche parabolique de direction $y = ax$
3. si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors asymptote $y = ax + b$

   Pour déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on étudie le signe de $y(t) - ax(t) - b$ au voisinage de t_0.

Exercice

(TD) Soit la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma \begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

Calculer la limite de x et y quand $t \to +\infty$ et en déduire une asymptote à la courbe.

Plan

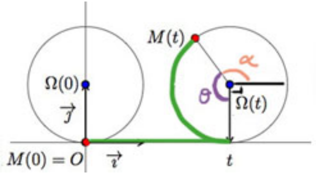
1. Définition et exemple
2. Périodicité et Symétrie
3. Continuité et dérivabilité
4. Points réguliers et stationnaires
5. Etude asymptotique
6. Longueur d'une courbe

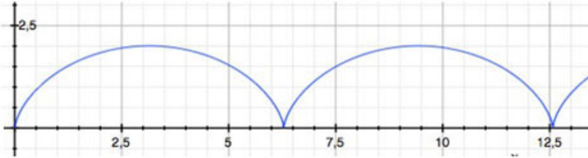
Définition

f une courbe paramétrée. La longueur de courbe entre les points $M(t_0)$ et $M(t_1)$ est

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} ||\overrightarrow{f'}(t)|| \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

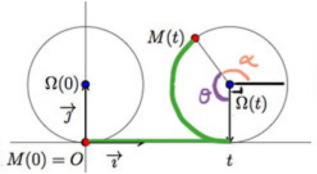
Exemple : Une roue d'un vélo $=$ un cercle de rayon 1. Un point fixe $M(t)$ (la valve) sur cette roue décrit une une cycloïde.
Calculons les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$ et la longueur d'une arche de cycloïde obtenue lorsque t parcourt $[0, 2\pi]$.

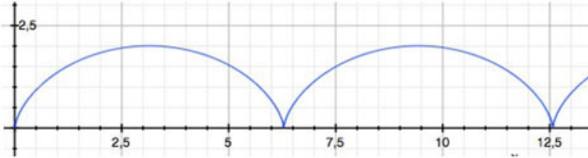




Le centre de la roue $\Omega(t) = (t, 1)$

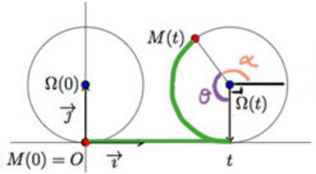
$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{O\Omega(t)} + \overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$$

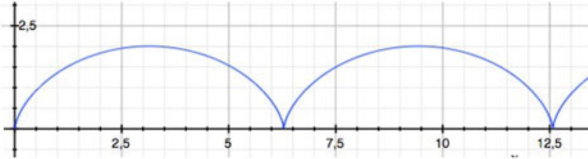




La roue étant un cercle de rayon 1, $\overrightarrow{\Omega(t)M(t)} = (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$ avec $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{\Omega(t)M(t)})$. Donc

$$x(t) = t + \cos\alpha(t); \qquad y(t) = 1 + \sin\alpha(t)$$





Quand la roue a avancé de t , la portion de cercle correspondante est de longueur t, donc l'angle $\theta(t) = t$ (rayon 1) compté dans le sens positif

$$\alpha(t) + \theta(t) = \alpha(t) + t = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha(t) = \frac{3\pi}{2} - t$$

Donc

$$\begin{cases} x(t) = t + \cos\left(3\frac{\pi}{2} - t\right) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 + \sin\left(3\frac{\pi}{2} - t\right) = 1 - \cos(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

On calcule le vecteur vitesse et sa norme

$$\overrightarrow{f}'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin(t) \end{cases} ;$$

$$\|\overrightarrow{f}'(t)\| = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{2(1-\cos(t))}$$

On remplace $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$ et on a

$$\|\overrightarrow{f}'(t)\| = \sqrt{2\left(1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)\right)} = 2\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 2\left|\sin \frac{t}{2}\right|$$

Donc

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \|v(t)\| dt = 2 \int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt$$

Comme $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$, le sinus est positif et

$$L(0, 2\pi) = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4 \cos \pi + 4 \cos 0 = 8$$

Et il en reste quoi ?

1. La limite de la courbe paramétrée $f(t) = (2t^2 + 1, 3t + 4)$ en $t = 2$ est....
2. C'est quoi le support d'une courbe paramétrée ?
3. La dérivée de $f(t) = (2t^2 + 1, 3t + 4)$ est ....
4. Un point de la courbe où $f'(t) = (0, 0)$ est appelé point....
5. La longueur d'une courbe paramétrée est....

Réponses

1. La limite de la courbe paramétrée $f(t) = (2t^2 + 1, 3t + 4)$ en $t = 2$ est $f(2) = (9, 10)$
2. C'est quoi le support d'une courbe paramétrée ? La courbe tracée par les points $(x(t), y(t))$
3. La dérivée de $f(t) = (2t^2 + 1, 3t + 4)$ est $f'(t) = (4t, 3)$
4. Un point de la courbe où $f'(t) = (0, 0)$ est appelé point st ationnaire
5. La longueur d'une courbe paramétrée est l'intégrale de la norme de la vitesse $\int \|f'(t)\| dt$.