Plan

f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.

Dérivabilité en un point

Définition

f est dérivable en a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \in \mathbb{R}$$

Exercice

Soit la fonction f définie par $f(x) = \alpha x + \beta$. Montrons que f est dérivable en $x = 1$

Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
En $a = 0$

$$\frac{x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \not\to$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Dérivée à droite et à gauche

Définition

a n'étant pas une extrémité de I

- f est dérivable à droite :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) \in \mathbb{R}$$

- f est dérivable à gauche :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$$

Propriété.

f est dérivable en $a \Leftrightarrow f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple : Soit la fonction

$$f(x) = |x|$$

On étudie sa dérivabilité en 0.

- En 0^- (à gauche), on a pour tout $x \in]-0,5;0[$:

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1, \quad \to \quad f'_g(0) = -1$$

- En 0^+ (à droite), on a pour tout $x \in]0;0,5[$:

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1, \quad \to \quad f'_d(0) = 1$$

La valeur absolue n'est pas dérivable en 0 puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0) = -1$.

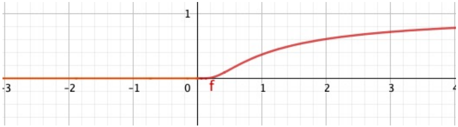
Exercice

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0.

Notion. la fonction f est dérivable en a si, et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et que les dérivées à gauche et à droite sont égales.



Propriété.

Si f est dérivable en a alors elle est continue en a. (Idem à gauche, Idem à droite)

ATTENTION ! Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a. Par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Il existe des fonctions qui sont continues en tout point de $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable.

Interprétation graphique

au point $A(a, f(a))$:

- $f'(a)$ est la pente de la tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Si f a une dérivée à droite en a, alors la courbe de f a une demi-tangente à droite de pente $f'_d(a)$.
- idem à gauche
- Si la limite du taux de variation est ∞ , alors f n'est pas dérivable en a mais la courbe possède une tangente verticale en a.
- Si la limite du taux de variation est ∞ à gauche, alors f n'est pas dérivable en a mais la courbe possède une demi-tangente verticale à gauche en a
- idem à droite

Fonction dérivée

Définition

f est dérivable sur I = f est dérivable en tout point de I

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

est la f est dérivable en tout point de I fonction dérivée de f.

Propriété.

Si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

Opérations sur les dérivées

Propriété.

Si f et g sont dérivables sur I, alors

1. $f+g$ est dérivable sur I et
$$(f+g)' = f' + g'$$
2. fg est dérivable sur I et
$$(fg)' = f'g + fg'$$
3. si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est dérivable sur I et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Propriété.

Si f et g sont respectivement dérivables sur I et $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f'.(g' \circ f).$$

Théorème. de prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$.

- Si
$$\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$
alors
$$f'(a) = \ell$$
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- Si
$$\lim_{x \to a} f'(x) = \pm\infty$$
alors f n'est pas dérivable en a et le graphe de f a une tangente verticale.

Exercice

(TD) Soit la fonction f définie par

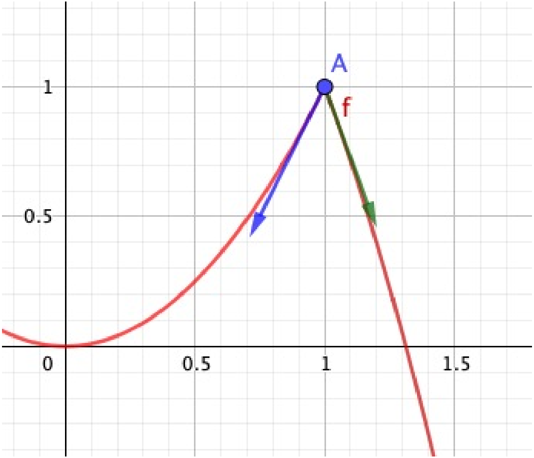
$$f(x) = \begin{cases} 1 + e - e^x & \text{si} \quad x > 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

On admet que f est continue en 1.

Calculer l'équation des demi-tangentes à la courbe de f au point d'abscisses $x = 1$.

Notion.

1. Si $f'(x) \to C$ quand $x \to a$ avec C une constante, alors $f'(a) = C$. Marche aussi pour les dérivées à gauche et à droite.
2. L'équation de la tangente est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Si f a une dérivée à droite en a, on remplace $f'(a)$ par $f'_d(a)$ pour avoir la demi-tangente à droite. Si f a une dérivée à gauche en a, on remplace $f'(a)$ par $f'_g(a)$ pour avoir la demi-tangente à gauche.


A
f
1
0.5
0
0.5
1
1.5

Plan

Définition

Définition

La dérivée seconde f'' de f est la dérivée de f' et on la note. f est deux fois dérivable sur I.

Si f est n fois dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Définition

f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et *si* $f^{(n)}$ est continue sur I.

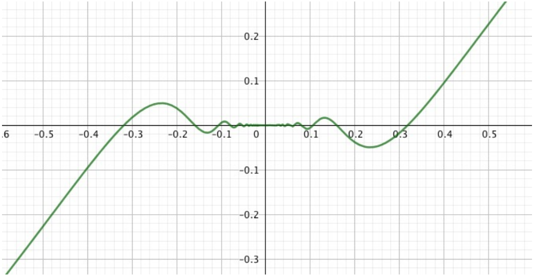
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f possède des dérivées de tous ordres sur I (indéfiniment dérivable).

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

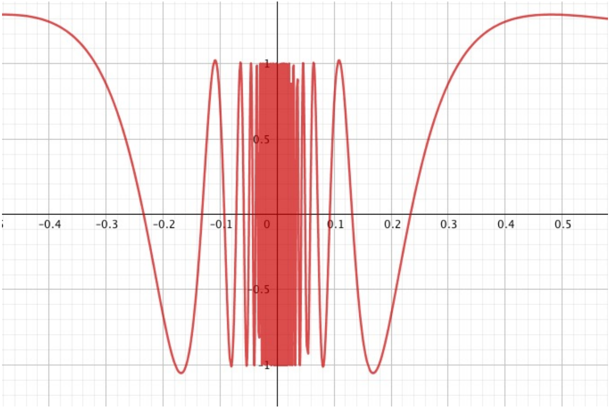
Exemple : Les polynômes, les fonctions cos, sin, exp et ln sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$.



On a déjà vu que la fonction était continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Le graphe de la dérivée est est le suivant



Opérations

Propriété.

f et g de classe $\mathcal{C}^n$, alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

f et g de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Théorème. Formule de Leibniz

f et g de classe $\mathcal{C}^n$, alors $f.g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

f et g de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\lambda f.g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Propriété.

f et g de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$), alors $g \circ f$ est également de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$)

Propriété.

f, g de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$), g ne s'annulant pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$)

Plan

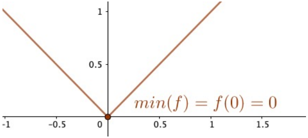
Extrema

Théorème.

a un point de I qui n'est pas une extrémité.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque :

- Graphiquement, la tangente en un extremum est horizontale.
- Ce théorème ne concerne que les fonctions dérivables. Par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ possède un minimum local en 0 et n'est pas dérivable en 0.

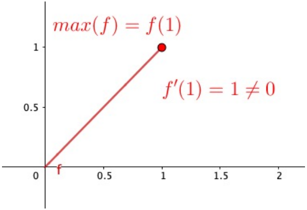


Ce théorème ne s'applique pas aux extrema locaux qui sont une extrémité du domaine de définition !

Exemple :

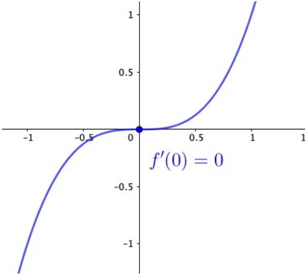
$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

admet un maximum local en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$.



Pas de réciproque : si $f'(a)$, alors ce n'est pas nécessairement un extremum.

Exemple : $f : x \mapsto x^3$ en 0. Sa dérivée s'annule en 0 et 0 n'est pas un extremum local.



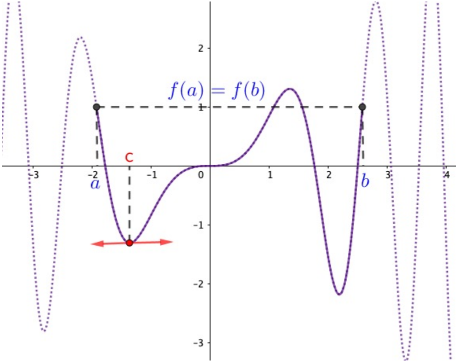
Théorème. de Rolle

f continue sur $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

Si $f(b) = f(a)$ alors il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = 0$$

Remarque : à ce point c, la tangente à la courbe est horizontale.



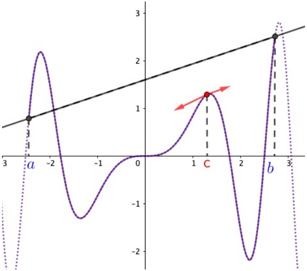
Théorème. Egalité des accroissements finis

f continue sur $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Il existe un nombre réel $c \in]a; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque : tout arc de la courbe possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les extrémités de cet arc.



Théorème. Inégalité des accroissements finis

f continue sur $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

Si

$$\forall t \in\,]a;b[\,, \quad |f'(t)| \leqslant k$$

, alors

$$\forall x,y \in [a;b], \quad |f(y)-f(x)| \leqslant k|y-x|$$

Exercice

(TD). Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [10000, 10001]$, justifier que $\sqrt{10000} \approx 100$ avec une erreur inférieure à 5×10^{-3}, c'est-à-dire

$$|\sqrt{10001} - 100| \leqslant 0,005$$

Applications du théorème des accroissements finis

Propriété.

f continue sur un intervalle I.
Si

- f est dérivable sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points)
- f' est strictement positive sur I(sauf éventuellement en un nombre fini de points),.

alors f est strictement croissante sur I

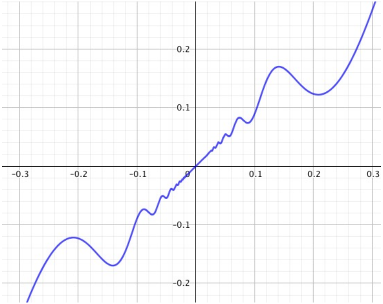
Idem avec strictement négative et strictement décroissante.

Remarque : $f'(a) > 0$ ne veut pas dire que f est croissante en a !

Exemple :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2 \cos \frac{1}{x} \\ 1 \end{cases}$$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' n'est de signe constant dans aucun intervalle autour de 0.



Et il en reste quoi ?

1. Quelle est la définition de $f'(a)$?
2. Graphiquement, ça représente quoi ?
3. la dérivée de $\frac{f}{g}$ est .... ?
4. Dire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ signifie quoi ?
5. Si $f'(a) = 0$, que peut-on en déduire ?
6. Si f est continue et dérivable, avec $f(1) = 3$ et $f(4) = 3$, que peut-on dire sur sa dérivée ?

Réponses

1. C'est la limite quand x tend vers a du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
2. La pente de la tangente à la courbe au point $(a, f(a))$.
3. $\frac{f'g-fg'}{g^2}$
4. Que f est dérivable autant de fois qu'on veut (et que f et ses dérivées sont continues)
5. Que la tangente en ce point est horizontale... mais attention on ne sait pas si c'est un max ou un min !
6. La dérivée s'annule au moins une fois entre $x = 1$ et $x = 4$.