Fonctions réelles : Compléments

Domaine de définition dans $\mathbb{R}$

- $D = I$ intervalle avec ses bords qui sont les extrémités de I
- $D = I \backslash \{a\}$ (I intervalle) avec ses bords a et les extrémités de I

Un voisinage de a V_a est

- $V_a =]b, c[\cap D$ avec $a \in]b, c[$ si a réel
- $V_a =]b, +\infty[\cap D$ si $a = +\infty$
- $V_a =]-\infty, c[\cap D$ si $a = -\infty$.

Une propriété locale d'une fonction est uniquement valable dans un voisinage (limite, continuité, dérivabilité....)

Plan

Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

f tend vers ℓ en a (ou admet une limite finie) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple : Racine carrée en 0. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $V_0 = [0, \varepsilon^2[$ et $x \in V$. Donc $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2$:

$$|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

Définition

f tend vers $+\infty$ en a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V, \qquad f(x) \geqslant A$$

f tend vers $-\infty$ en a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V_a, \quad \forall x \in V, \qquad f(x) \leqslant A$$

Exemple : . Fonction carré en $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, on pose $V_{+\infty} =]\sqrt{|A|}, +\infty[$ et $x \in V_{+\infty}$. Alors

$$x \geqslant \sqrt{|A|} \quad \Rightarrow x^2 \geqslant A$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Propriété. Unicité de la limite

Si une fonction f possède une limite en a, alors cette limite est unique.

Plan

Continuité en un point

Définition

f est continue en a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$$

Dans le cas contraire, f est discontinue en a.

Exemple :

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{0} = 0 = \sqrt{0}$.
- La fonction partie entière n'est pas continue en $m \in \mathbb{Z}$

Définition

Si f non définie en a une extrémité réelle de D et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \in \mathbb{R}$$

Alors

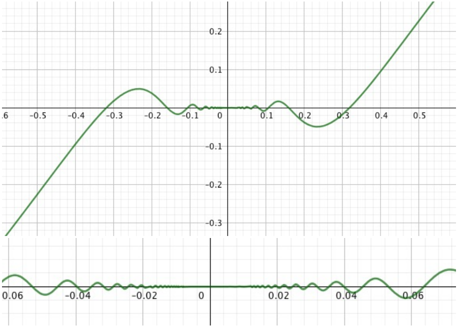
$$\begin{array}{rccl} f: & D \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{array} \right. \end{array}$$

est le prolongement par continuité en a de f.

Exemple : Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \sin(1/x) \end{array}$$

se prolonge par continuité en 0.



Exercice

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x(x^3+1)}{x+1} \end{array}$$

se prolonge par continuité en -1.
(Indice : Faire la division euclidienne de $x^3 + 1$ par $x + 1$.

Notion. Si f n'est pas définie en a et si f admet une limite finie ℓ en a, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = \ell$.

Définition

Pour $a \in D$.

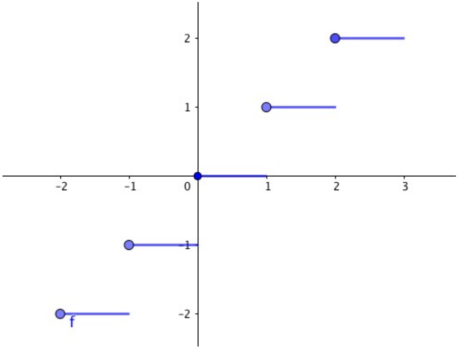
- f est continue à gauche en a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

- f est continue à droite en a

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple : La partie entière est continue à droite en tout $m \in \mathbb{Z}$ mais n'est pas continue à gauche en tout $m \in \mathbb{Z}$.



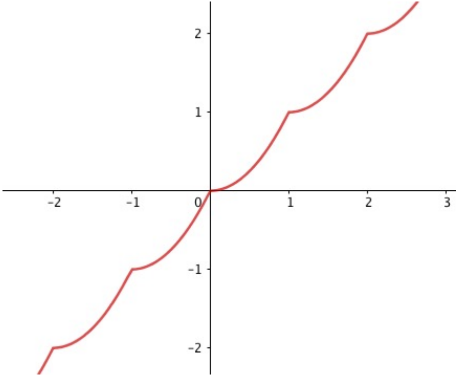
Propriété.

La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en a.

Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \left(x - \lfloor x \rfloor\right)^2$$

Montrer que f est continue en tout $m \in \mathbb{Z}$.



2
1
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2

Continuité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition

f est continue sur D $\Leftrightarrow$ f est continue en tout point de D.

$\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur D.

La courbe représentative de f peut être dessinée « sans lever le crayon » sur chaque intervalle de D.

Exemples :

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $m \in \mathbb{Z}^{-*}$, la fonction $x \mapsto x^m$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- sin, cos et exp sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ peut être prolongée par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$). La fonction obtenue est alors continue sur $\mathbb{R}^+$.

Opérations et continuités

Théorème.

f et g deux fonctions continues :

- $\lambda f + \mu g$ est continue
- fg est continue
- si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est continue
- $g \circ f$ est continue

Exemple :

Exercice

Justifier que la fonction

$$f(x) = \ln(x-2) + 2x.e^x$$

est continue sur $]2, +\infty[$.

Notion. Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. La somme, le produit et la multiplication par une constante de fonctions continues est continue. La composée de fonctions continues est continue si les ensembles de définitions sont respectés.

Plan

Lemme des valeurs intermédiaires

Lemme.

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I.

On suppose qu'il existe a et $b \in I$ tels que

$$f(a)f(b) \leqslant 0$$

($f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires)

alors il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$f(c) = 0$$

Démonstration. Supposons $a < b$, $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.
Le principe = on approche c par deux suites adjacentes

- $[a, b]$ coupé en deux $\to [a, (a+b)/2]$ et $[(a+b)/2, b]$.
  Si c tel que $f(c) = 0$ existe dans $[a, b]$ alors il est dans une des deux moitiés.
- On prend cette moitié, on re-coupe en deux.
  Donc c est encore dans une des deux moitiés (quart du départ !)
- **Etc.**

On obtient une suite d'intervalles emboîtés, de longueur tendant vers 0, qui contiennent tous c.

Etape 1 : Construction des intervalles.

$\rightarrow$ extrémités de ces intervalles. On définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) d'éléments de $[a, b]$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(c_n) \geqslant 0 \\ c_n & \text{si } f(c_n) < 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(c_n) \geqslant 0 \\ b_n & \text{si } f(c_n) < 0 \end{cases}$$

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

Par construction,

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

$$f(a_n) \leqslant 0 \qquad f(b_n) \geqslant 0$$

Etape 2.

Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

$$a_{n+1} - a_n = ?$$

Si $f(c_n) \geqslant 0$,

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0$$

Si $f(c_n) < 0$,

$$a_{n+1} - a_n = c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0$$

Finalement

$$a_{n+1} \geqslant a_n$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

De même, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Suivant le signe de $f(c_n)$, la différence $b_{n+1} - a_{n+1}$ vaut $c_n - a_n$ ou $b_n - c_n$. Dans les deux cas, on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

La suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

Finalement, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite notée $c \in [a, b]$.

Etape 3. $f(c) = 0$

Comme f est continue,

$$f(a_n) \to f(c) \qquad f(b_n) \to f(c)$$

Or,

$$\begin{aligned} f(b_n) \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad f(c) \geqslant 0 \\ f(a_n) \leqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad f(c) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Finalement

$$f(c) = 0$$

Définition

Les points fixes d'une fonction f sont les solutions de l'équation

$$f(x) = x$$

Ce sont les points d'intersections de f avec la première bissectrice.

Exemple : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y$$

Démonstration. Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.On pose

$$g(x) = f(x) - y$$

$g(a) = f(a) - y$ et $g(b) = f(b) - y$ sont de signes contraires car y est entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le lemme précédent, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$g(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(c) - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(c) = y$$

Exercice

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 2}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer $f(0)$ et $f(2)$. Que peut-on en déduire sur l'équation $f(x) = 1$?

Notion. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I avec $a \leqslant b$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

ATTENTION : le théorème des valeurs intermédiaires = existence d'au moins un c tel que $f(c) = y$.

Corollaire.

Soit f continue sur $[a, b]$.
Si f est strictement monotone sur $[a, b]$,
alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y$$

Intervalles

Propriété.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Définition

- f admet un maximum local en $a \Leftrightarrow$ il existe un voisinage V de a tel que

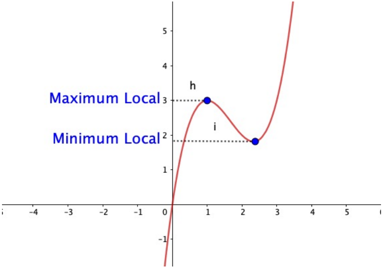
$$\forall x \in V, \qquad f(x) \leqslant f(a)$$

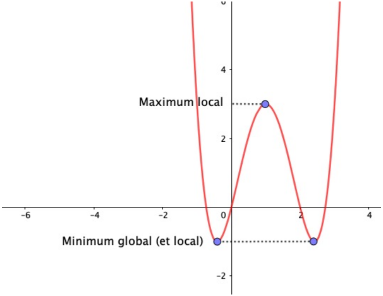
  Si l'inégalité est valable sur tout l'ensemble de définition de f, $f(a)$ est alors le maximum (global) de f.

- f admet un minimum local en $a \in I \Leftrightarrow$ il existe un voisinage V tel que

$$\forall x \in V, \qquad f(x) \geqslant f(a)$$

  Si l'inégalité est valable sur tout l'ensemble de définition de f, $f(a)$ est alors le minimum (global) de f.


h
Maximum Local
i
Minimum Local


Maximum local
Minimum global (et local)

Théorème. Image d'un segment par une fonction continue

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors il existe deux points c_1 et c_2 de $[a, b]$ tels que

$$f(c_1) = \min(f), \qquad f(c_2) = \max(f)$$

$$f([a, b]) = \big[f(c_1), f(c_2)\big]$$

En particulier, f est alors bornée sur le segment $[a, b]$.

Et il en reste quoi ?

1. Si une fonction f a pour limite $f(a)$ quand x tend vers a, on dit que f est .... ?
2. si la limite à gauche et à droite d'une fonction f en un point a sont différentes de $f(a)$, que peut-on conclure ?
3. Si f est une fonction continue telle que $f(2) = 5$ et $f(3) = -1$, que peut-on dire sur l'équation $f(x) = 0$?
4. Et sur l'équation $f(x) = 3$, en sachant que f est strictement décroissante ?

Réponses

1. continue en a.
2. f n'est pas continue en a
3. l'équation a au moins une solution entre 2 et 3.
4. l'équation a exactement une solution entre 2 et 3.