Probabilités

(3)

Plan

1. Variable aléatoire
2. Variable aléatoire finie
3. Lois usuelles
4. Variables aléatoires indépendantes
5. Variable aléatoire continue

Définition

Une variable aléatoire réelle X est une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

C'est une valeur qui dépend du résultat de l'expérience aléatoire.

$(X \in A)$ ou $(X = a)$ sont des événements concernant la valeur de X.

Ces événements dépendent de l'expérience aléatoire, mais cette expérience aléatoire n'apparait plus dans la notation de X.

Exemple : (fil rouge) Un joueur lance deux fois de suite la même pièce de monnaie. A chaque lancer, si obtient pile, il gagne 1 euros et s'il obtient face, il perd 2 euros.
L'univers est

$$\Omega = \{P, F\}^2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$$

Notons X la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur.

$$X(P, P) = 2, \quad X(P, F) = -1, \quad X(F, P) = -1, \quad X(F, F) = -4$$

donc

$$X(\Omega) = \{-4, -1, 2\}$$

Plan

Loi d'une variable aléatoire finie

Définition

X variable aléatoire finie si elle prend un nombre dénombrable de valeur.

La loi de X :

- les valeurs a prises par X
- la probabilité $\mathbb{P}(X = a)$ de prendre chaque valeur

On peut présenter la loi par un tableau, une liste de cas ou une formule globale.

Exemple : X prend les valeurs $-4, -1, 2$ et on doit calculer leur probabilités

- $\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}\Big((P,F),(F,P)\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(X=-4) = \mathbb{P}\Big((F,F)\Big) = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}\Big((P,P)\Big) = \frac{1}{4}$

la loi de X :

a	-4	-1	2
$\mathbb{P}(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice

(TD) Une urne contient 16 boules : 8 blanches, 5 noires et 3 rouges. On tire, sans remise, 3 boules dans l'urne. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe $+1$ si les trois boules sont de couleurs différentes et -1 dans tous les autres cas.

Déterminer la loi de X.

Notion. Connaître les valeurs a prises par X et la probabilité $\mathbb{P}(X = a)$ de prendre ces valeurs, c'est ce qu'on appelle la **loi** de la variable aléatoire X.

Espérance

X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

Définition

L'espérance de X est $E(X)$ défini par

$$E(X) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + x_n\mathbb{P}(X = x_n) + \dots$$

C'est la valeur moyenne prise par X.

Une variable aléatoire d'espérance nulle est centrée

L'espérance ne dépend que de la loi de X. Deux variables différentes, mais ayant même loi, auront la même espérance.

Exemple : L'espérance de gain X est

$$E(X) = -4 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = -1$$

Propriété.

X et Y deux variables aléatoires, a, b réels.

1. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
2. Si $a \leqslant X \leqslant b$, alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.
3. si X est positive, alors son espérance aussi.
4. Si $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$

Propriété. Espérance d'une composée.

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

$$= g(x_1)\mathbb{P}(X = x_1) + g(x_2)\mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + g(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$$

Variance et écart-type

Définition

La variance de X est

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Une variable aléatoire est réduite si sa variance vaut 1

Exemple : On a déjà $E(X) = -1$

$$E(X^2) = (-4)^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2}$$

$$V(X) = \frac{11}{2} - (-1)^2 = \frac{9}{2}$$

Propriété.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, V(aX+b) = a^2 V(X)$.
2. $V(X) \geqslant 0$

Attention : $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$.

Définition

L'écart type de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart type mesure la dispersion de X par rapport à l'espérance.

Propriété.

Si X est d'espérance m et d'écart-type $\sigma \neq 0$

$$\widetilde{X} = \frac{X - m}{\sigma}$$

est une variable aléatoire centrée réduite.
Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \quad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)}$$

Exercice

(TD) Une urne contient 16 boules : 8 blanches, 5 noires et 3 rouges. On tire, sans remise, 3 boules dans l'urne. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe $+1$ si les trois boules sont de couleurs différentes et -1 dans tous les autres cas. On a déjà $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{14}$ et $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{11}{14}$.

Déterminer l'espérance et la variance de X.

Notions.

- $E(X) = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + x_2 \mathbb{P}(X = x_2) + \dots$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Plan

Définition

X suit une loi uniforme sur un ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

(équiprobabilité)

Exemple : Si X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$, alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Définition

X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Cette loi représente une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès $(X = 1)$ et échec $(X = 0)$.

$$E(X) = p, \qquad V(X) = p(1 - p)$$

Définition

- On fait une suite de n expériences identiques et indépendantes.
- Le succès a la probabilité p de se produire à chaque fois.
- On compte X le nombre de succès pendant mes n expériences.

Alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

- Les valeurs prises par X sont $0, 1, \ldots, n$.
- La probabilité que X vaille k (il y a eu k succès pendant mes n expériences) est

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On a $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Exemple : Tirage *successifs* de 5 boules avec remise dans une urne contenant 16 boules noires et 8 boules blanches. On compte le nombre de boules blanche.

Ce nombre suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{8}{16+8} = \frac{1}{3}$ (probabilité de tirer une boule blanche lors d'un tirage)

La probabilité de tirer 3 boules blanche lors de ces 5 tirages est

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-3}$$

$$= \frac{5!}{3!2!}\frac{1}{3^3}\frac{2^2}{3^2} = 10 \times \frac{4}{243} = \frac{40}{243}$$

Exercice

On considère X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(6, \frac{1}{4})$.
Calculer la probabilité des événements suivants :

- "X vaut 4" ;
- "X est supérieur à 5" ;
- "X est inférieur strictement à 2" ;
- "X est supérieur à 1".

Notion.

- Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, la probabilité que X vaille k est $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Plan

$X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires (sur le même Ω)

$$(X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n) = (X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

Définition

- X et Y sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

- $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendants si :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Propriété.

1. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y), \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants , alors

$$E(X_1 \times \cdots \times X_n) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_n),$$

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Propriété.

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivant toute la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Plan

Généralités

Les valeurs d'une variable :

- On peut les compter $\rightarrow$ variable discrète
- forment un ou des intervalles $\rightarrow$ variable continue

Définition

La loi d'une variable aléatoire continue X = sa fonction de répartition ou sa densité.

- La fonction de répartition F :

$$F(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a)$$

- la densité f est la dérivée de la fonction de répartition F.

$$f(a) = F'(a), \qquad F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Exemple :

Propriété.

X densité f et fonction de répartition F.

- F est croissante,

$$\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0, \qquad \lim_{a \to +\infty} F(a) = 1$$

- F est l'aire sous la courbe de la densité.
-

$$f(a) \geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Remarque : : Pour les variables aléatoires continues, on a

$$\mathbb{P}(X = a) = 0$$

Donc

$$P(X \leqslant a) = P(X < a)$$

$$P(X \geqslant a) = P(X > a)$$

Propriété.

X densité f et fonction de répartition F.

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) = F(a) \quad = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a) = 1 - F(a)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \text{ si } a < b$$

Exemple :

Propriété.

X densité f et fonction de répartition F.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2$$

Exemple :

La loi Normale

Définition

X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$ (Laplace-Gauss, Gaussienne) de moyenne m et d'écart type σ
si sa densité de probabilité est

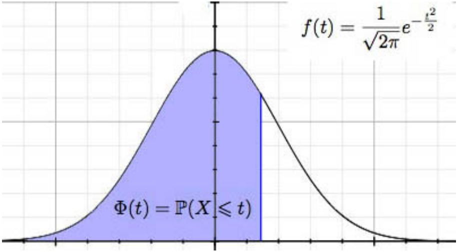
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, alors on dit que la loi normale est centrée réduite

Exemple : X de loi normale centrée réduite ($m = 0, \sigma = 1$) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Le graphe de sa densité = courbe de Gauss ou courbe en cloche.



Sa fonction de répartition est notée Φ (ou Π)

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

formulaire de la loi normale centrée réduite

On a les valeurs de $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$ avec t positif.

Règles de calculs :

$$\mathbb{P}(X \leqslant -t) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t)$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant t)$$

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$$

Remarque : Certains formulaires (Béton armé) donnent $\mathbb{P}(X \leqslant t) - 0,5$.

Théorème.

Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, alors

$$T = \frac{Y - m}{\sigma}$$

suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

Technique : Pour calculer une probabilité avec Y, on soustrait m et on divise tout par σ dans la probabilité.

$$\mathbb{P}(Y < a) = \mathbb{P}(Y - m < a - m) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - m}{\sigma} < \frac{a - m}{\sigma}\right)$$

$$= \mathbb{P}(T < b) = \Phi(b)$$

Exercice

(TD) Soit variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(24; 6,5)$. Calculer

$$\mathbb{P}(X \geqslant 27)$$

On donne pour T suivant la loi normale centrée réduite :

$$\mathbb{P}(T \leqslant 0,46) = 0,68$$

Notion. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $T = \frac{Y-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

Et il en reste quoi ?

1. Une variable aléatoire, c'est quoi ?
2. Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, -1 et 1. Que faut-il calculer pour connaitre sa loi ?
3. On fait 5 expériences identiques et indépendantes, chaque expérience ayant $1/3$ de chance de réussite, et on compte X le nombre de réussite de l'expérience. Quelle est la loi de X ?
4. Si X est une variable aléatoire continue de densité f, comment calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$?
5. Si X est une loi normale de moyenne 10 et d'écart type 2, que peut-on dire sur $\frac{X-10}{2}$?

Réponses

1. Une variable aléatoire est une valeur qui dépend du résultat d'une expérience aléatoire.
2. Pour connaitre sa loi, il faut calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=-1)$ et $\mathbb{P}(X=1)$.
3. On fait 5 expériences identiques et indépendantes, chaque expérience ayant $1/3$ de chance de réussite, et on compte X le nombre de réussite de l'expérience. la loi de X est la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 1/3)$
4. Si X est une variable aléatoire continue de densité f, comment calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$?
   $\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx$
5. Si X est une loi normale de moyenne 10 et d'écart type 2, que peut-on dire sur $\frac{X-10}{2}$?
   $\frac{X-10}{2}$ suit une loi normale centrée réduite.