Probabilités

(2)

1 Probabilités sur un univers fini

Plan

Univers et événements

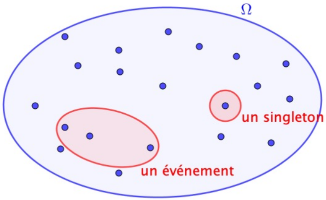
Définition

L'ensemble Ω des résultats d'une expérience aléatoire est l'univers des possibles.

Chaque sous-ensemble de Ω est appelé un événement.

Les événements élémentaires sont les singletons de Ω.

On considère que Ω est un ensemble fini.



Exemples :

- L'univers des résultats d'un jet de dé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  - L'événement « obtenir un nombre pair » est le sous -ensemble $\{2, 4, 6\}$.
  - Les événements élémentaires ou singletons sont $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.
- L'univers des résultats d'un lancer de pièce est $\Omega = \{$ Pile, Face $\}$.
- Le premier jour de panne d'une machine depuis sa mise en route est $\Omega = \mathbb{N}^\star$. Ce n'est pas un ensemble fini.

Définition

Si A et B sont deux événements

- $\Omega \backslash A = \overline{A} = non - A$ est l'évènement contraire de A
- $A \cup B =$ « A ou B » : A se produit ou B se produit (non exclusif !).
- $A \cap B =$ « A et B » : A et B se produisent (en même temps).
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$: A se produit, mais pas B.

Exemple : Expérience du lancer de dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
A= « le résultat est pair » =$\{2, 4, 6\}$
B= « Le résultat est inférieur ou égal à 3 »=$\{1, 2, 3\}$.

- L'événement contraire de A est

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$$

- L'événement « le résultat est pair ou inférieur ou égal à 3 » est

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

.

- L'événement « le résultat est pair et inférieur ou égal à trois » est

$$A \cap B = \{2\}$$

- L'événement « le résultat est pair, mais pas inférieur ou égal à 3 » est

$$A \backslash B = \{4, 6\}$$

Définition

Deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. les deux événements ne peuvent pas se réaliser en même temps à l'issue de l'expérience.

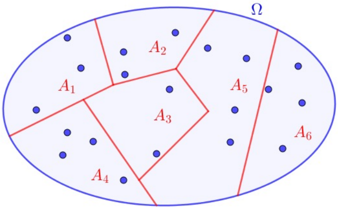
L'événement A implique l'événement B si $A \subset B$. Si A se produit, alors B se produit.

Exemple : Expérience du lancer de dé : l'événement $A=$ ≪ obtenir un nombre inférieur à 2 ≫ implique $B=$ ≪ obtenir un nombre inférieur à 3 ≫.

Définition

Une famille $A_1, \ldots, A_n$ d'événement de Ω est une partition :

1. Les A_i sont incompatibles deux à deux $A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. Leur union fait le tout $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$



Probabilités sur un univers fini

Définition

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour tous événements incompatibles A et B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Equiprobabilité

Soit Ω un ensemble fini non vide. L'équiprobabilité est la probabilité définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Chaque événement élémentaire a la même chance de se produire, à savoir

$$\frac{1}{Card(\Omega)}$$

Exercice

(TD) On interroge au hasard 50 enfants pratiquant un sport. 25 enfants pratiquent le football, 22 le tennis et 16 le basket-ball. 7 pratiquent le football et le tennis, 5 pratiquent le basket et le football, et 2 pratiquent les trois sports. On appelle un de ces enfants au hasard. Quelle est la probabilité qu'il pratique

1. Le football ?
2. Le tennis ?

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Propriété.

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

En particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$$\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Exemple : On lance un dé rouge et un dé vert. Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux donne un résultat pair ?

Propriété.

Si

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

avec $A_1, \cdots, A_n$ deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque :

- Si $\Omega = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ (partition), alors

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) = 1$$

- Si on décompose un événement A comme réunion d'événements élémentaires $\{a_1\}, \ldots \{a_n\}$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{a_1\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{a_n\})$$

Exemple : Dans une classe où tous les élèves font une LV (anglais, allemand et espagnol). La probabilité qu'un élève fasse anglais est $\frac{1}{5}$, celle qui fasse allemand est $\frac{3}{10}$. Alors la probabilité qu'un élève fasse espagnol est

$$1-\frac{1}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$$

Propriété.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Exercice

(TD) On interroge au hasard 50 enfants pratiquant un sport. 25 enfants pratiquent le football, 22 le tennis et 16 le basket-ball. 7 pratiquent le football et le tennis, 5 pratiquent le basket et le football, et 2 pratiquent les trois sports. On appelle un de ces enfants au hasard. Quelle est la probabilité qu'il pratique

1. Le football et le tennis ?
2. le football ou le tennis ?

Probabilités conditionnelles

Définition

La probabilité de A sachant E est

$$\mathbb{P}(A|E) = \mathbb{P}_E(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$$

Remarque : On en déduit $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$

Exemple : A la naissance d'un enfant, on suppose qu'il y a autant de chance qu'un garçon ou qu'une fille naisse. Vous rencontrez un ami. Vous savez qu'il a deux enfants, sans vous souvenir si ce sont des garçons ou des filles ou les deux. Votre ami est accompagné d'une fille. Quelle est la probabilité qu'il ait deux filles ?

L'univers est

$$\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}$$

La probabilité est l'équiprobabilité. On note $A=\ll$ L'ami a deux filles $\gg$ et $E= \ll$ l'ami a au moins une fille $\gg$. La probabilité qu'on cherche est

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(\{(F,F)\})}{\mathbb{P}(\{(F,F),(F,G),(G,F)\}} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Propriété.

$\mathbb{P}(...|E)$ est une probabilité.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}|E) = 1 - \mathbb{P}(A|E)$
2. $\mathbb{P}(B \backslash A|E) = \mathbb{P}(B|E) - \mathbb{P}(A \cap B|E)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B|E) = \mathbb{P}(A|E) + \mathbb{P}(B|E) - \mathbb{P}(A \cap B|E)$

Propriété.

Si $E_1, \ldots, E_n$ forment une partition de Ω, alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E_1) + \mathbb{P}(A \cap E_2) + \cdots \mathbb{P}(A \cap E_n)$$

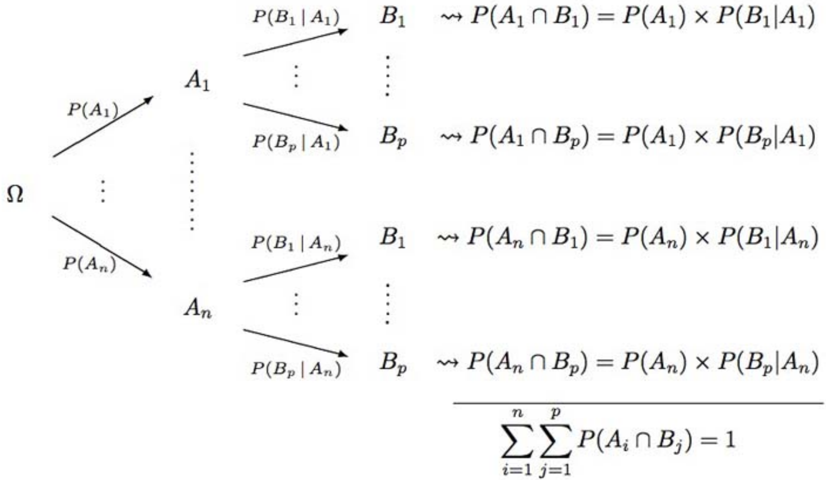
formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)$$

E_i représentent les différentes causes possibles qui peuvent engendrer A.

Construction d'un arbre de probabilité

premier critère ou cause : $A_1, \ldots, A_n$ une partition
deuxième critère ou conséquence : $B_1, \ldots, B_p$ une partition



Les probabilités sur les flèches sont les probabilité de transition

Règles de calcul des arbres

- la somme des probabilités des flèches partant d'un même noeud vaut 1.
- La probabilité à l'extrémité d'une branche est le produit des flèches y menant, et ça correspond à l'intersection des événements A_i et B_j.

Cet arbre permet de calculer :

- les probabilités de toutes les intersections possibles.
- la probabilité d'un événement B_j, en sommant toutes les probabilités contenant B_j qui sont à l'extrémité de l'arbre.

Exercice

Monsieur Z. vient au lycée en train une fois sur deux en moyenne, en voiture deux fois sur cinq et en bus dans les autres cas. Lorsqu'il vient en train, il y a une probabilité de 0,1 qu'il soit en retard. Lorsqu'il vient en voiture, il y a une probabilité de 0,2 qu'il soit en retard. Lorsqu'il vient en bus, il y a une probabilité de 0,6 qu'il soit en retard.

Construire l'arbre de probabilité. On notera T l'événement « Monsieur Z vient en train », V l'événement « Monsieur Z vient en voiture », B l'événement « Monsieur Z vient en bus », R l'événement « Monsieur Z est en retard ».

Notions.

- Dans un arbre, la somme des probabilités partant d'un noeud vaut 1. Le bout d'une branche est le produit des probabilités qui y mènent et c'est la probabilité de l'intersection des événements.

Exercice

1. Déterminer la probabilité que Monsieur Z soit venu en bus et soit en retard.
2. Déterminer la probabilité que Monsieur Z soit en retard.
3. Aujourd'hui, monsieur Z. est en retard. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en bus ?

Notions.

- Dans un arbre, le bout d'une branche est le produit des probabilités qui y mènent et c'est la probabilité de l'intersection des événements.
- Si des événements $E_1, \ldots, E_n$ forment une partition, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap E_1) + \mathbb{P}(A \cap E_2) + \cdots \mathbb{P}(A \cap E_n)$.
- $\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$

Indépendance

Dans le vocabulaire courant :
indépendance = pas de liens= indépendance physique.

Définition

A et B sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque : Si A et B indépendants, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. La réalisation de l'un ne change pas la probabilité que l'autre se réalise.

1. Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Si des événements sont physiquement indépendants, alors ils sont mathématiquement indépendants.
3. Mais la réciproque est fausse !

Exemple : On lance indépendamment deux dés à 6 faces, un rouge et un vert. On considère
A= ≪ le dé vert affiche 1 ≫
B= ≪ Le dé rouge affiche 2 ≫
C=≪ les deux dés affichent le même nombre ≫

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants.

Et il en reste quoi ?

1. En probabilité, qu'est-ce qu'un événement ?
2. Si A et B sont des événements, quand se produit $A \cup B$?
3. Quel est la probabilité conditionnelle de A sachant B ?

Réponses

1. un événement est un ensemble, qui contient un ou plusieurs résultats d'une expérience aléatoire
2. $A \cup B$ se produit quand A se produit ou quand B se produit ou quand les deux se produisent.
3. la probabilité conditionnelle de A sachant B est $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.