Probabilités

Plan

1. Statistique et Estimation (en bref)

2. Dénombrement

Statistique

Etude statistique : observations, expériences ou enquêtes $\rightarrow$ données $\rightarrow$ informations

- Population = ensemble étudié.
- Individu = élément de la population.
- Echantillon de taille n = groupe de n individus pris dans la population.
- Variable statistique = aspect qu'on étudie sur les individus de la population.

Exemple : Pour étudier la résistance aux chocs d'une voiture, les constructeurs font des crash-tests sur un échantillon de la production. Les enquêtes d'opinion font des sondages sur des échantillons de la population.

Définition

Une série statistique est une suite de valeurs x_1, x_2, x_3, ..., x_n prises par une variable statistique sur une population (échantillon ou population totale).

On calcule plusieurs indicateurs :

Définition

La valeur médiane : On classe les n valeurs dans l'ordre croissant.

- Si la liste contient un nombre impaire de valeur, La médiane est la valeur "milieu", c'est à dire la valeur numero $\frac{n+1}{2}$.
- Si la liste contient un nombre paire de valeur, la médiane est la moyenne des deux valeurs milieu, c'est à dire la moyenne des valeurs numéro $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$.

Définition

- La moyenne : la somme de toutes les valeurs divisée par le nombre de valeurs.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

- La variance.

$$Var = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

- **L'écart-type.** $\sigma = \sqrt{Var}$. Il mesure la dispersion de la série.

La statistique permet de faire de l'estimation.

Dans une population est très grande, si la moyenne et l'écart-type d'une variable n'est pas connu :

1. on sélectionne un échantillon de population
2. on calcule la moyenne et l'écart-type de cet échantillon
3. On devine (estime) la moyenne et l'écart-type de la variable sur tout la population.

Estimation

Propriété.

Une variable de moyenne m et d'écart-type σ inconnus.

On calcule $\bar{x}$ et σ_e la moyenne et l'écart-type d'un l'échantillon de taille n.

Alors on estime

$$m = \bar{x}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_e$$

Exercice

Déterminer la médiane des notes des deux groupes d'une classe à un devoir.

- Groupe A : 5, 6, 6,7,7,8,8, 10, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20
- Groupe B : 0, 1, 3, 4, 6, 8, 8 , 9, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 15

Exercice

Lors d'un examen, sur 80 copies corrigées, un correcteur a obtenu les notes suivantes, qu'il a réparti dans un tableau :

note	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
effectif	2	2	5	10	9	10	12	10	7	5	5

note	15	16	18
effectif	1	1	1

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de la série.

Remarque : Un échantillon est normal si

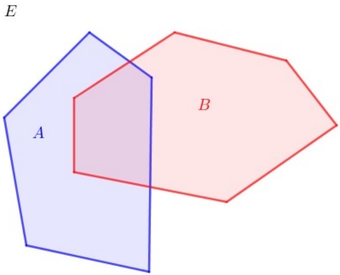
- environ 30 % des valeurs sont hors de l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$
- environ 5% des valeurs sont en dehors de l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$.

Cet échantillon de note est normal.

Plan

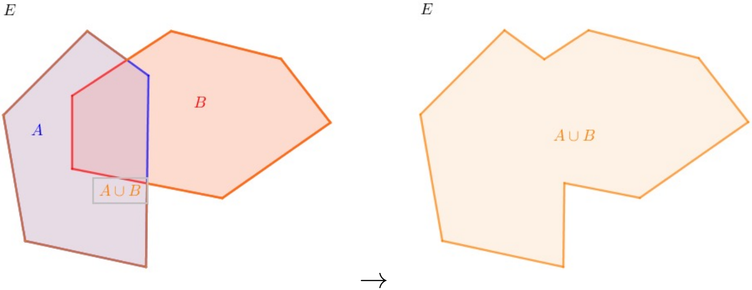
L'essentiel sur les ensembles (Rappel)

On considère E un ensemble, et A, B des parties (ou sous-ensembles) de E.



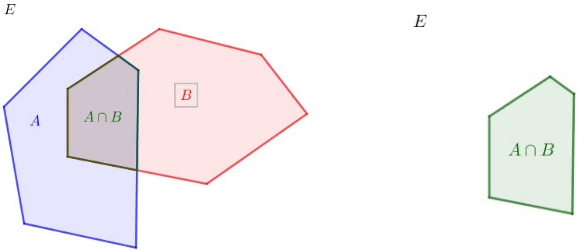
$A \cup B$= A union B. Contient les éléments qui sont dans A ou B (ou dans les deux à la fois).

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$



$A \cap B = A$ inter B (intersection). Contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

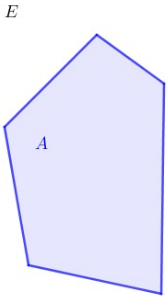
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$



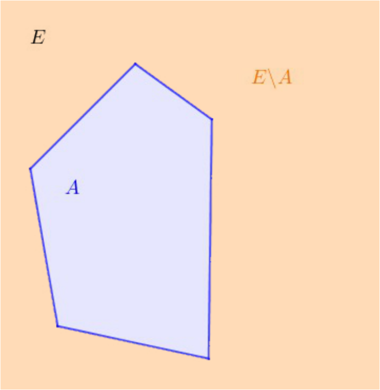
$\rightarrow$

$E \backslash A = \bar{A} = \mathcal{C}^E A =$ complémentaire de A dans E. Contient les éléments qui n'appartiennent pas à A.

$$x \in E \backslash A \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \in E.$$



$\rightarrow$



Cardinal d'un ensemble

Définition

$Card(E)$ (ou $\#E$) le cardinal de E est le nombre d'élément de E.

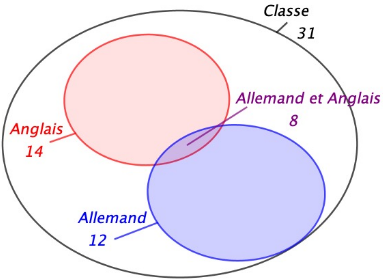
Propriété.

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

Si $E \cap F = \emptyset$, E et F sont disjoints et

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$$

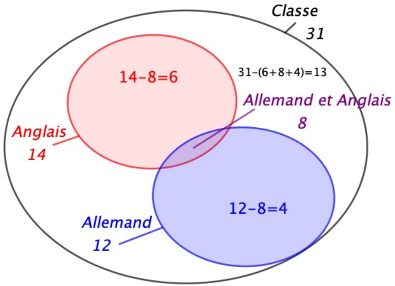
Exemple : Dans une classe de 31 élèves, le cours d'allemand est suivi par 12 élèves et le cours d'anglais par 14 élèves. On sait qu'il y a 8 élèves qui étudient à la fois l'allemand et l'anglais. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe qui étudient l'une ou l'autre de ces deux langues ?



Propriété.

$$Card(E \backslash A) = Card(E) - Card(A)$$

Exemple : Et combien d'élèves ne font ni anglais, ni allemand ?



Exercice

(TD) Dans une classe de 25 élèves, 16 sont des garçons. Il y a 20 élèves qui étudient l'anglais et parmi eux 13 garçons.

1. Combien y a-t-il de filles ?
2. Combien y a-t-il de garçons qui n'étudient pas l'anglais ?
3. Combien y a-t-il de filles qui n'étudient pas l'anglais ?

Notions.

1. Donner des noms/Notations à des ensembles, éventuellement les représenter.
2. $Card(E \backslash A) = Card(E) - Card(A)$.

Propriété.

le produit cartésien de E et F est $E \times F = \{(e, f), e \in E, f \in F\}$.

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Plus globalement

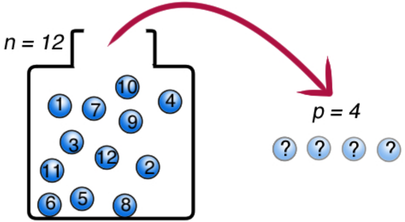
$$Card(E_1 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times \cdots \times Card(E_p)$$

$$Card(E^n) = (Card(E))^n$$

Exemple : Une voiture est fabriquée suivant trois déclinaisons : berline, coupé, break, et elle est disponible en 5 couleurs distinctes. Combien de modèles distincts de voiture existe-t-il ?

Apprendre à compter

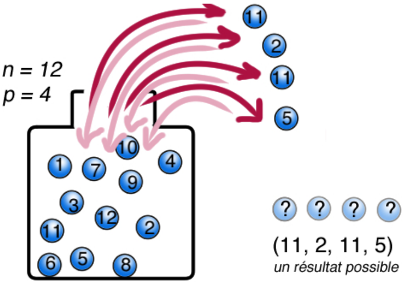
Soit un ensemble E contenant n éléments. On veut tirer p éléments dans cet ensemble E.



On a plusieurs situations possibles : Est-ce que l'ordre dans lequel on tire les éléments compte ? Est-ce qu'on remet l'éléments qu'on a tiré en place avant de tirer de nouveau un élément ?

Avec ordre et avec remise

On tire les éléments p les uns après les autres, l'ordre dans lesquels on les tire a une importance, et à chaque tirage on remet l'élément tiré dans l'ensemble (on peut donc tirer plusieurs fois le même élément).



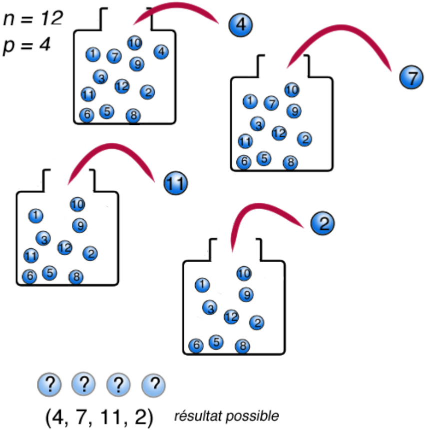
$$n^p = \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de choix}\\ \text{au 1-er tirage}}} \times \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de choix}\\ \text{au 2-ième tirage}}} \times \cdots \underbrace{}_{\cdots} \times \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{au p-ième tirage}}}$$

Avec ordre et avec remise, le nombre de tirage de p éléments parmi n est :

Exemple : Combien peut-on écrire de mots de trois lettres minuscules ? (qui ne sont pas nécessairement dans le dictionnaire).

Avec ordre et sans remise

On tire les p éléments les uns après les autres, l'ordre dans lesquels on les tire a une importance, et à chaque tirage on garde l'élément tiré (on ne peut pas tirer plusieurs fois le même élément).



Avec ordre et sans remise, le nombre
de tirage de p éléments parmi n est :

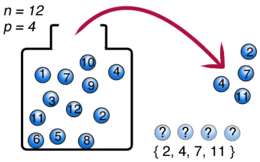
$$\frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de choix} \\ \text{au 1-er tirage}}} \times \underbrace{(n-1)}_{\substack{\text{nombre de choix} \\ \text{au 2-ième tirage}}} \times \underset{\cdots}{\cdots} \times \underbrace{(n-p+1)}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{au p-ième tirage}}}$$

Remarque : Si on tire TOUT les éléments avec ordre et sans remise, ça s'appelle une permutation. On obtient alors $n!$ tirages possibles.

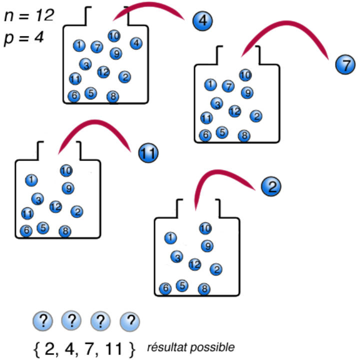
Exemple : 8 athlètes disputent une course de 100 m. Combien y a-t-il de podiums distincts possibles ?

Sans ordre et sans remise :

Soit on tire les p éléments d'un seul coup.



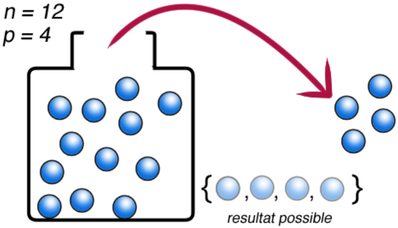
Soit on les tire les uns après les autres mais sans que l'ordre dans lesquels on les tire ne compte et en gardant l'élément tiré (on ne peut pas tirer plusieurs fois le même élément).



Sans ordre et sans remise, le nombre
de tirage de p éléments parmi n est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple : On tire 5 jetons dans un sac qui contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. Combien de poignée différentes de 5 jetons peut-on obtenir ?



Sans ordre et sans remise aussi !

Exercice

(TD) Dans un lot de 20 pièces fabriquées, il y en a 4 de mauvaises. Dans le lot, on prélève au hasard 4 pièces simultanément.

1. Combien de prélèvements différents peut-on obtenir ?
2. Quel est le nombre de prélèvements où les quatre pièces sont bonnes ?

Notion. Sans ordre et sans remise, le nombre de tirage de p éléments parmi n est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Conseils pour les dénombrements

- Penser au complémentaire

  Exemple : pour compter les garçons dans la classe ATS, il est plus rapide de compter le nombre de filles et de le retrancher à l'effectif total.

- succession de p étapes. Chaque étape a respectivement $n_1, \ldots, n_p$ possiblités (ne dépendent QUE de l'étape), alors le nombre total de possibilités est

$$n_1 \times \cdots \times n_p$$

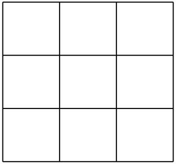
Exemple : Une plaque d'immatriculation est constituée d'une succession de deux lettres, trois chiffres, deux lettres (les lettres I, O, U ne sont jamais utilisées). Combien existe-t-il de plaque différentes ?

Exercice

(TD) Dans un lot de 20 pièces fabriquées, il y en a 4 de mauvaises. Dans le lot, on prélève au hasard 4 pièces simultanément. Quel est le nombre de prélèvements où une seule pièce est mauvaise ?

Découper pour mieux compter. On peut découper l'ensemble (partitionner) en plusieurs sous-ensembles disjoints plus facile à dénombrer. Ensuite on additionne le tout.

Exemple : Dénombrer le nombre de carré (de toutes tailles) dans le quadrillage



Il y a 9 carrés de taille 1, 4 carré de taille 2 et 1 carré de taille 3. Donc au total $9+4+1= 14$ carrés.

Découper pour mieux compter (2). Lorsqu'un ensemble à dénombrer est défini par des expression ≪ Au moins.... ≫ ou ≪ Au plus.... ≫, penser à le traduire en liste d'éléments exacts. (N'oubliez pas le premier conseil au passage)

Exemple : "Au moins 2" se traduit par "2 ou 3 ou 4 ou 5 ..."

Exemple : Dénombrer les mots de 5 lettres contenant au moins une fois la lettre A.

- les mots qui contiennent exactement une fois A : 5×25^4
  1. 5 choix pour la position de A
  2. les 4 lettres restantes à choisir parmi 25 avec ordre et remise
- les mots qui contiennent exactement 2 fois A : 10×25^3
  1. choix de deux positions de A parmi 5 : $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$
  2. les 3 lettres restantes à choisir parmi 25 avec ordre et remise
- exactement 3 fois A : $\binom{5}{3} \times 25^2 = 10 \times 25^2$
- exactement 4 fois A : $\binom{5}{4} \times 25^1 = 5 \times 25$
- exactement 5 fois A : 1 possibilité

Et on additionne les résultats

$$5 \times 25^4 + 10 \times 25^3 + 10 \times 25^2 + 5 \times 25 + 1 = 2115751 \text{ mots}$$

On peut aussi passer au complémentaire :

- on compte les mots qui ne contiennent pas la lettre A : 25^5 mots.
  1. 5 lettres à choisir parmi 25 avec ordre et avec remise
- Nombre total de mot 26^5
  1. 5 lettres à choisir parmi 26 avec ordre et avec remise

.

On obtient

$$26^5 - 25^5 = 2115751 \text{ mots}$$

Avec ou sans ordre ?

On doit choisir p éléments parmi n, sans ordre et sans remise.
Dans les faits, on tire ces éléments un après l'autre... mais on ne se préoccupe pas de l'ordre ! On utilise alors les combinaisons, en regardant le résultat d'un tirage sans l'ordre d'obtention des éléments.

Exemple : Combien de mains de 5 cartes peut-on obtenir à l'aide d'un jeu de 23 cartes ?

Et il en reste quoi ?

1. Comment calculer la moyenne d'une série statistique de 20 nombres ?
2. On tire p éléments dans un ensemble de n élément avec ordre et avec remise. Combien de tirages possibles ?
3. Et sans ordre, ni remise ?

Réponses

1. la moyenne d'une série statistique : on additionne tous les nombres et on divise par 20.
2. On tire p éléments dans un ensemble de n élément avec ordre et avec remise. Il y a n^p tirages possibles.
3. On tire p éléments dans un ensemble de n élément sans ordre, ni remise. Il y a $\binom{n}{p}$ tirages possibles.