Suites réelles (et complexes)

Plan

Définitions

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Notation

$$u_n = o(v_n)$$

Se lit : u_n est un petit o de v_n.

Exercice

(TD) Soit $v_n = n$ et $w_n = n^2$. Montrer que $v_n = o(w_n)$.

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Notation

$$u_n \sim v_n$$

Se lit : u_n est équivalent à v_n.

Exercice

(TD) Soit $u_n = n+1$ et $v_n = n$ et $w_n = n^2$. Montrer que $u_n \sim v_n$.

Propriétés

Propriété.

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
2. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.

Exemple : $\ln(n) = o(n)$ et $n = o(e^n)$, donc

$$\ln(n) = o(e^n), \qquad n\ln(n) = o(ne^n)$$

Propriété.

1. une suite est équivalente à son terme dominant : si $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n = o(v_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
3. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$.
4. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ et $v_n \neq 0$, $x_n \neq 0$, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{x_n}$. –

Remarque : pas d'addition, de soustraction, d' application de fonction sur un équivalent !

Exercice

On donne $\cos\frac{1}{n} \sim 1$ et $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$. Déterminer un équivalent de

$$\cos\frac{1}{n} + n, \qquad \cos\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}$$

Propriété.

Si $u_n \sim v_n$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exercice

On donne $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de
$$n \sin \frac{1}{n}$$

Propriété.

Si $u_n \to \ell$ réel non nul. Alors

$$u_n \sim \ell$$

Exemple : $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ donc $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$.

Remarque : interdit d'écrire $u_n \sim 0$!

Comparaison des suites de référence

Propriété.

1. $$\alpha < \beta, \qquad n^\alpha = o(n^\beta)$$
2. $$0 < a < b, \qquad a^n = o(b^n)$$

Corollaire.

Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Comparaison des suites tendant vers $+\infty$

Lemme.

$$\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$$

Démonstration. on a $n! \geqslant n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Propriété.

Si $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$:

$$(\ln n)^{\alpha} = o(n^{\beta}), \qquad n^{\beta} = o(a^{n}), \qquad a^{n} = o(n!) \qquad n! = o(n^{n}).$$

Exercice

Donner la limite de la suite

$$\frac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$$

Comparaison des suites tendant vers 0

Lemme.

Si $u_n \to +\infty$, $v_n \to +\infty$ et $u_n = o(v_n)$ alors

$$\frac{1}{v_n} = o(\frac{1}{u_n})$$

Propriété.

Si $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a \in]0, 1[$:

$$\frac{1}{n!} = o(a^n), \quad a^n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right).$$

Utilisation des limites classiques des fonctions usuelles

Propriété.

Si $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$, alors :

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \tan(u_n) \sim u_n \qquad 1-\cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1+u_n) \sim u_n \qquad \mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n.$$

Exemple :

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+4}\right)^{3n}$.
2. Déterminer un équivalent de la suite $\big(\ln(\cos(1/n))\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Plan

Suites de nombres complexes

Définition

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $|z_n|$ est bornée.

Remarque : En complexe, pas de suite croissante ou décroissante, ni majorée ou minorée.

Définition

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ :

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$$

Notation

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell$$

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque : $z_n \to \infty$ impossible en complexe

Propriété.

$$z_n \to a + ib \qquad \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_n) \to a, \quad \mathrm{Im}(z_n) \to b$$

Exercice

Donner la limite de la suite complexe

$$\frac{2\cos\frac{4}{n} + 5in}{n}$$

Corollaire.

Si $z_n \to \ell$, alors $\overline{z_n} \to \overline{\ell}$.

Démonstration. Si

$$z_n = x_n + iy_n \to a + ib$$

alors $x_n \to a$ et $y_n \to b$. Donc

$$\overline{z_n} = x_n - iy_n \to a - ib = \overline{a + ib}$$

Propriété.

Toute suite complexe convergente est bornée.

Remarque : Les résultats de suites réelles qui ne font pas intervenir des inégalités sont valables en complexes.

Et il en reste quoi ?

1. $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow ?$
2. $\tan \frac{2}{n} \sim ?$
3. Si une suite complexe (z_n) a pour limite $1+2i$, quelles sont les limites de $\Re e(z_n)$, $\mathrm{Im}(z_n)$ et $\bar{z}_n$?

Réponses

1. $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$
2. $\tan \frac{2}{n} \sim \frac{2}{n}$
3. si une suite complexe (z_n) a pour limite $1 + 2i$, alors $\Re e(z_n) \to 1$, $\mathrm{Im}(z_n) \to 2$ et $\bar{z}_n \to 1 - 2i$