Suites réelles (et complexes)

(2)

Plan

Limite finie d'une suite réelle

Définition

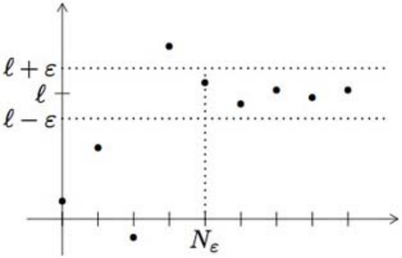
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

la suite est convergente

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Remarque : une suite est divergente (ou diverge) lorsqu'elle n'est pas convergente.



La bande horizontale contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition

- $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell, \quad \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^+$$
- $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell, \quad \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^-$$

Remarque : en pratique, $\ell = 0$.

Propriétés des suites convergentes

Propriété.

u_n converge vers 0 $\Leftrightarrow$ $|u_n|$ converge vers 0.

Remarque : que avec 0 ! $(-1)^n$ diverge mais $|(-1)^n|$ converge vers 1.

Propriété.

Toute suite convergente est bornée.

Suites tendant vers l'infini

Définition

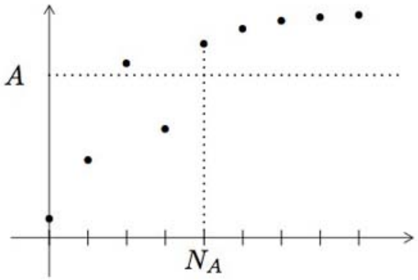
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n \geqslant A.$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n \leqslant A.$$

La suite diverge vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), elle admet $+\infty$ (ou $-\infty$) pour limite.



A
N_A

Propriété.

- $u_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad$ minorée.
  Au delà d'un certain rang, minorée par un réel strictement positif.
- $u_n \to -\infty \quad \Rightarrow \quad$ majorée.
  Au delà d'un certain rang, majorée par un réel strictement négatif.

Des limites à connaître

Propriété.

$u_n = f(n)$ avec f continue.

$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell, \quad \text{alors } \lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

Exemples :

- Les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$... tendent vers $+\infty$.
- Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$... convergent vers 0.

Des limites à connaître (2)

- Si $a > 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- Si $a = 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers 1.
- Si $0 < a < 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- Si $a = 0$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers 0.
- Si $-1 < a < 0$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (en alternant de signe).
- Si $a = -1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut alternativement 1 et -1. Ne converge pas.
- Si $a < -1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge complètement. Elle change de signe alternativement.

Propriété.

f fonction continue.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \lim_{x\to\ell} f(x) = a, \qquad \text{alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = a.$$

Exemple :

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Exercice

On admet que la limite de $\frac{\ln(1+2x)}{x}$ est 2 quand $x \to 0$. Quelle est la limite de la suite suivante ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{2}$$

Opérations sur les limites

Propriété.

Si $u_n \to 0$ et (v_n) est bornée, alors

$$u_n \times v_n \to 0$$

Exemple :

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1} \to 0, \qquad |\sin(n)| \leqslant 1$$

donc

$$\frac{1}{n}\sin(n) \to 0$$

Exercice

Déterminer la limite de la suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Notion. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Opérations de limites simples : $u_n \to \ell_1$ et $v_n \to \ell_2$

$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(u_n \times v_n)$	$\lim(\lambda u_n)$	$\lim(\frac{1}{u_n})$	$\lim(\frac{v_n}{u_n})$
$\ell_1 + \ell_2$	$\ell_1 \times \ell_2$	$\lambda \ell_1$	$\frac{1}{\ell_1}$	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$

Sauf formes indéterminées.

Remarque : La factorisation par le terme dominant et autres techniques pour lever les indétermination sont valables aussi pour les suites

Exemples :

Exercice

Calculer la limite de la suite suviante :

$$u_n = n^2 + 3^n - \frac{5}{n^3}$$

Remarque : divergente + convergente = divergente.

Mais divergente + divergente = ? et divergente × divergente = ?.

Exemple :

$$u_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ impair} \\ 2 & \text{Si } n \text{ pair} \end{cases} \rightarrow \text{ diverge}$$

$$u_n = v_n = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{Si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{Si } n \text{ pair} \end{cases} \rightarrow \text{ diverge}$$

Mais

$$u_n + v_n = 2 \rightarrow 2 \qquad u_n \times v_n = 0 \rightarrow 0$$

Propriété.

1. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \geqslant m$, alors $u_n + v_n \to +\infty$.
2. Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \leqslant M$, alors $u_n + v_n \to -\infty$
3. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \geqslant m > 0$, alors $u_n v_n \to +\infty$
4. Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \geqslant m > 0$, alors $u_n v_n \to -\infty$
5. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \leqslant M < 0$, alors $u_n v_n \to -\infty$
6. Si $u_n \to -\infty$ et $v_n \leqslant M < 0$, alors $u_n v_n \to +\infty$

Exemple : $\sin(n) \geqslant -1$ et $n^2 \to +\infty$ donc $\sin(n) + n^2 \to +\infty$

Exercice

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$. La suite $u_n + v_n$ présente donc la forme indéterminée $+\infty - \infty$.

Déterminer la limite (si elle existe) de $u_n + v_n$ dans les cas suivants :

- $u_n = n$ et $v_n = 3 - n$.
- $u_n = n$ et $v_n = \sqrt{n} - n$.
- $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$.

Exercice

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \to +\infty$ et $v_n \to 0$. La suite $u_n \times v_n$ présente donc la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Déterminer la limite (si elle existe) de $u_n \times v_n$dans les cas suivants :

- $u_n = n$ et $v_n = \frac{3}{n}$.
- $u_n = n$ et $v_n = \frac{3}{\sqrt{n}}$.
- $u_n = n$ et $v_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

Plan

Relation d'ordre et passage à la limite

Propriété.

1. Si $u_n \geqslant 0$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$$
2. Si $u_n \leqslant v_n$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Théorème. ≪ **des gendarmes** ≫

Si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

$$u_n \to \ell \quad w_n \to \ell$$

Alors

$$v_n \to \ell$$

Corollaire.

Si

$$|u_n| \leqslant v_n \qquad v_n \to 0$$

Alors

$$u_n \to 0$$

.

Propriété. (un gendarme)

Si

$$u_n \leqslant v_n \qquad u_n \to +\infty$$

alors

$$v_n \to +\infty$$

Si

$$u_n \leqslant v_n \qquad v_n \to -\infty$$

alors

$$u_n \to -\infty$$

.

Limite d'une suite monotone

Théorème.

1. (u_n) croissante et majorée $\Rightarrow u_n \to \ell$ réel.
2. (u_n) croissante et non majorée $\Rightarrow u_n \to +\infty$.
3. (u_n) décroissante et minorée $\Rightarrow u_n \to \ell$ réel.
4. (u_n) décroissante et non minorée $\Rightarrow u_n \to -\infty$.

Exercice

(TD) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 4, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

On admet que $\forall n \in N, u_n \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Notions.

- Une suite est décroissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$
- Théorème de la limite monotone : toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée converge vers un réel ℓ.
- Si la limite d'une suite existe, on peut faire tendre $n \to +\infty$ dans les égalités concernant la suite.
- (Bonus) Pour montrer que $u_n \geqslant 1$, on peut faire une récurrence.

Suites adjacentes

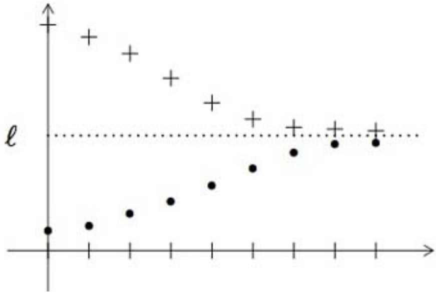
Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

1. une suite est croissante
2. l'autre suite est décroissante.
3. $(v_n - u_n)$ tend vers 0.

Remarque : Dans ce cas, si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, alors

$$u_n \leqslant v_n$$



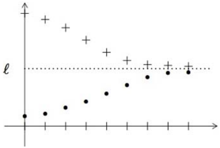
Propriété.

(u_n) et (v_n) adjacentes convergent vers la même limite ℓ.

Si (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante, alors

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Démonstration. Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.



- (u_n) est croissante et $u_n \leqslant v_0$, donc $u_n \to \ell_u \in \mathbb{R}$ avec $u_n \leqslant \ell_u$.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $V_N \geqslant u_0$, donc $v_n \to \ell_v \in \mathbb{R}$ avec $\ell_v \leqslant v_n$.

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_v - \ell_u,$$

Donc $\ell_u = \ell_v$.

Et il en reste quoi ?

1. Si la suite (u_n) tend vers -5 et la suite v_n tend vers $+\infty$, quelles sont les limites de
$$u_n + v_n, \qquad u_n \times v_n, \qquad \frac{u_n}{v_n}$$
2. Au fait, quand on parle de limite d'une suite, c'est toujours quand $n \to ?$
3. Une suite bornée multipliée par une suite qui tend vers 0, ça donne ?
4. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n > u_n$, alors $v_n \to ?$

Réponses

1. Si la suite (u_n) tend vers -5 et la suite v_n tend vers $+\infty$, quelles sont les limites de $u_n + v_n$, $u_n \times v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$?
   $u_n + v_n \to +\infty$, $u_n \times v_n \to -\infty$ et $\frac{u_n}{v_n} \to 0$
2. Au fait, quand on parle de limite d'une suite, c'est toujours quand $n \to ?$
   $n \to +\infty$
3. Une suite bornée multipliée par une suite qui tend vers 0, ça donne ?
   une suite tendant vers 0
4. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n > u_n$, alors $v_n \to ?$
   $v_n \to +\infty$