Suites réelles (et complexes)

Plan

Définitions

Définition

Une suite numérique est

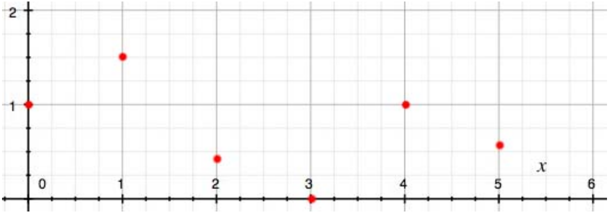
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \rightarrow & u(n) = u_n \end{array}$$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{3002}, \cdots$$

le suite est indexée par $\mathbb{N}$
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ = ensemble des suites réelles

Remarque : $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ = ensemble des suites complexes

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ sur un graphe = des points isolés.



Remarque :

1. Il y a des suites qui ne démarrent pas à $n = 0$:

$$(u_n)_{n \geqslant n_0} \Leftrightarrow u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \cdots ,$$

2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: toute la suite

$$\neq$$

u_n : le terme numéro n de la suite.

Exemples : Pour définir une suite

- terme par terme :

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 1,5 \quad u_2 = 0,4 \quad u_3 = 0 \quad u_4 = 1 \quad \cdots u_{749} = ?$$

- par une formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 2$$

alors

$$u_0 = 0^2 - 2 = -2 \quad u_1 = 1^2 - 2 = -1 \cdots, u_{10} = (10)^2 - 2 = 98, \cdots$$

- par récurrence :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 2u_n - 1$$

alors

$$u_1 = 2u_0 = 2 \quad u_2 = 2u_1 = 4 \quad u_3 = 2u_2 = 8 \quad \cdots u_{2749} = ?$$

Exercice

(TD) Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 1$$

et

$$v_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 1$$

Calculer les cinq premiers termes de chaque suite .

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $=$ constante au delà d'un certain rang

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Exemple : $\left(\lfloor \frac{1}{n} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\lfloor \frac{1}{1} \rfloor = 1 \quad \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0 \quad \lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0, \cdots$$

valable que pour les suites
réelles à partir de maintenant

Suites monotones

Définition

Suite croissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n,$$

Suite strictement croissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} > u_n,$$

Suite décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n,$$

Suite strictement croissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} < u_n,$$

Définition

Suite monotone $=$ croissante ou décroissante

Suite strictement monotone $=$ strictement croissante ou strictement décroissante

Remarque : ça peut être uniquement « au delà d'un certain rang ».

Etude de la monotonie Deux méthodes :

signe de $u_{n+1} \quad - \quad u_n$

- $$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$

  suite croissante

- $$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$$

  suite constante

- $$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$$

  suite décroissante

Exemple : Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = -3, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - n^2$$

Si tous les $u_n > 0$, on étudie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$??1

- $$\forall n, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$

  suite croissante

- $$\forall n, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$$

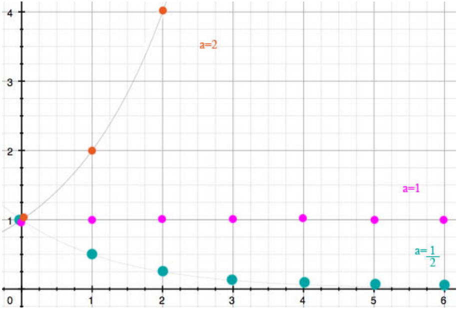
  suite constante

- $$\forall n, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$$

  suite décroissante

Propriété.

- si $0 < a < 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante
- si $a = 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante
- si $a > 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante.



Démonstration.

Exercice

(TD) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 - 3n$$

Déterminer le sens de variation de la suite.

Notion. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Définition

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant M$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant m$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $=$ majorée et minorée

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant u_n \leqslant M$$

$$\exists \mathcal{M} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant \mathcal{M}$$

Remarque : Une suite positive est minorée par 0.

Exercice

(TD) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 - 3n$$

Montrer qu'elle est majorée par 5.

Notion. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.

Plan

Suites arithmétiques

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un réel r (la raison) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nr.$$

Exemple : Donner le sens de variation d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Propriété.

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

Alors

$$S_n = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}).$$

La somme de n termes consécutifs :

$$\frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

est une suite arithmétique de raison $r = 1$. Elle est strictement croissante et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3 + n \times (1) = 3 + n$$

La somme des n premiers termes est

$$S_n = \frac{n}{2}(3 + 3 + (n-1)) = \frac{n(5+n)}{2}$$

Suites géométriques

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe q (la raison) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q \times u_n$$

Propriété.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \times q^n$$

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$. Etudier le sens de variation de la suite.

Et si $q < 0$?

Notions.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \times q^n$
- Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne contenant que des termes strictement positifs :
  - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
  - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
  - si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Propriété.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

- si $\mathbf{q \neq 1}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \sum_{k=0}^{n-1} q^k = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

  La somme de n termes consécutifs est

$$\text{(premier terme)} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

- si $q = 1$, $S_n = n \times u_0$.

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 5, \quad u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

est une suite géométrique de raison 2. Elle est strictement croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 5 \times 2^n$$

La somme des n premiers termes est

$$S_n = 5 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -5(1-2^n)$$

Et il en reste quoi ?

1. Si une suite vérifie pour tout n : $u_{n+1} < u_n$, alors la suite est ....
2. Si une suite vérifie pour tout n : $u_{n+1} = u_n + r$ avec r une constante, alors la suite est.....

Réponses

1. Si une suite vérifie pour tout n : $u_{n+1} < u_n$, alors la suite est ....
   strictement décroissante
2. Si une suite vérifie pour tout n : $u_{n+1} = u_n + r$ avec r une constante, alors la suite est.....
   arithmétique