Fonctions réelles de deux variables (2)

Plan

Différentielle

Définition

La différentielle de f en a est la fonction

$$\begin{array}{rccl} df_a : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & df_a(v) = D_v f(a) = \overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) \cdot v \end{array}$$

C'est une application linéaire ayant pour matrice

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(a)$$

Remarque : avec les notations

$$\mathrm{d}x : (x, y) \mapsto x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}y : (x, y) \mapsto y.$$

$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\mathrm{d}y$$

$$v = (h, k) \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d}f_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k$$

Sans préciser le point a :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

.

Exemple : Exprimer la différentielle en tout point de la fonction

$$f : (x, y) \rightarrow x^2y^3$$

Exercice

(TD) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = xy \sin(x^2 + y^2)$$

Calculer ses dérivées partielles premières et donner sa différentielle.

Notion. $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$

Cas des fonctions composées

Théorème. Composition par une fonction d'une variable

u et v deux fonctions réelles d'une variable t

$$g(t) = f\Big(u(t), v(t)\Big).$$

Si u, v, f de classe $\mathcal{C}^1$ alors g de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g' = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(u, v\Big)u' + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(u, v\Big)v' = \Big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(u, v)\Big) \cdot (u', v').$$

Exemple : Soit f la température en chaque point d'un pays. On considère un point $M(t)$ (voiture) qui se déplace avec les coordonnées $(u(t), v(t))$. Ainsi la fonction $g(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$ est la variation de la température au cours d'un voyage.
La dérivée de g est donnée par :

$$g'(t) = \Big(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\big(u(t), v(t)\big)\Big) \cdot \big(u'(t), v'(t)\big).$$

Le vecteur $\big(u'(t), v'(t)\big)$ est le vecteur vitesse de la voiture donc la dérivée de la température au cours du voyage est le produit scalaire du gradient du champ de températures par le vecteur vitesse du mobile. En valeur absolue, $g'(t)$ est d'autant plus grand que le vecteur vitesse est dans la direction du gradient. Cela signifie que la variation de température est plus grande lorsque le mobile suit le vecteur gradient.

Composée d'une fonction de deux variables

Théorème.

$$g(x,y) = f\left(\mathbf{u}(x,y), \mathbf{v}(x,y)\right)$$

Si u, v et f sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(x,y).$$

Pour la différentielle, on obtient

$$\mathrm{d}g = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

Différentielle en coordonnées polaires.

$$f : (x, y) \to f(x, y), \quad x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

. dérivée par rapport à r :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

Dérivée par rapport à θ :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)(r\cos\theta)$$

La différentielle est donc

$$\mathrm{d}g = \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}r + \left(-r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}\theta$$

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

- On fait les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- On fait les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

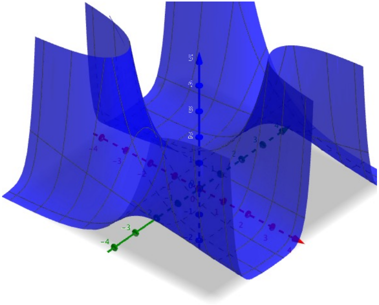
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

On obtient les quatre dérivées partielles secondes.

Remarque : Les dérivées secondes croisées sont $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Exemple : Déterminer les dérivées partielles secondes de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \exp(x \sin(y)). \end{array}$$



Définition

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur A $\Leftrightarrow$ ses dérivées secondes existent et sont continues sur A.

$\mathcal{C}^2(A, \mathbb{R}) =$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur A

Remarque : Les fonctions usuelles sont toutes de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition, SAUF la racine carrée et la valeur absolue en 0, les arcsin et arcos en 1 et -1.

Exercice

(TD) Calculer les dérivées partielles premières et secondes par rapport à x et y de la fonction

$$f(x,y) = e^{2x}\cos y$$

Notions. Les dérivées partielles premières sont $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, les dérivées partielles secondes sont $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Théorème. de Schwarz

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Attention : Si les dérivées partielles secondes d'une fonction f existent mais ne sont pas continues ce résultat n'est plus valable.

Théorème. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors son développement limité d'ordre 2 en $a = (\alpha, \beta)$ est :

$$f(x,y) = f(a) + p(x-\alpha) + q(y-\beta)$$

$$+\frac{1}{2}\Big(r(x-\alpha)^2 + 2s(x-\alpha)(y-\beta) + t(y-\beta)^2\Big) + o(\|(x,y)-a\|^2),$$

$$\text{avec } p = \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a),$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

(notations de Monge).

Remarque : Autre version de cette formule :

$$f(a+(h,k)) = f(a) + ph + qk + \frac{1}{2}\Big(rh^2 + 2shk + tk^2\Big) + o(\|(h,k)\|^2)$$

Exemple : Donner un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \mapsto & \mathrm{e}^{x\sin(y)} \end{array}$$

On calcule $f(0,0) = 1$,

$$p = \sin(y)e^{x\sin y} = 0; \quad q = x\cos(y)e^{x\sin y} = 0; \quad r = \sin^2(y)e^{x\sin y} = 0;$$

$$s = \cos(y)e^{x\sin y} + x\sin(y)\cos(y)e^{x\sin y} = 1;$$

$$t = -x\sin(y)e^{x\sin y} + x^2\cos^2(y)e^{x\sin y} = 0$$

On a donc

$$f(x,y) = 1 + 2xy + o(\|(x,y)\|^2)$$

Plan

a un point de l'ensemble de définition de f qui ne soit pas sur le bord.

Définition

- f présente un maximum local en a :

$$\forall v \in B(a,r),\ f(v) \leqslant f(a)$$

- f présente un minimum local en a :

$$\forall v \in B(a,r),\ f(v) \geqslant f(a)$$

- f présente un maximum global :

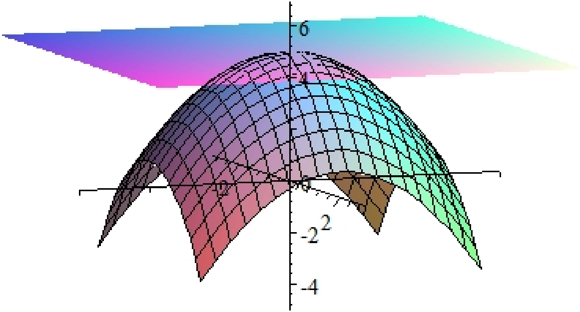
$$\forall v \in A,\ f(v) \leqslant f(a)$$

- f présente un minimum global en a :

$$\forall v \in A,\ f(v) \geqslant f(a)$$

- extremum $=$ minimum ou maximum

Remarque : Graphiquement, la fonction f admet un extremum local en a si la surface représentant f reste localement en dessous ou au dessus du plan d'équation $z = f(a)$.



Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Propriété.

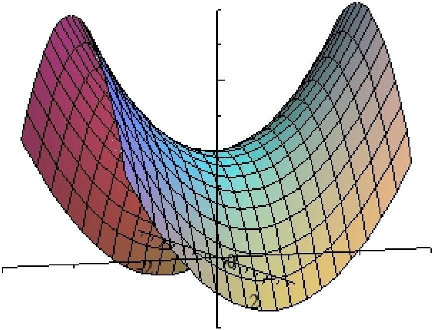
Si f classe $\mathcal{C}^1$ présente un extremum local en a,
alors son gradient en a est nul :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right.$$

Attention : Le gradient de f peut s'annuler en un point qui n'est pas un extremum local.

Exemple :

$$f : (x, y) \to x^2 - y^2 + 3$$



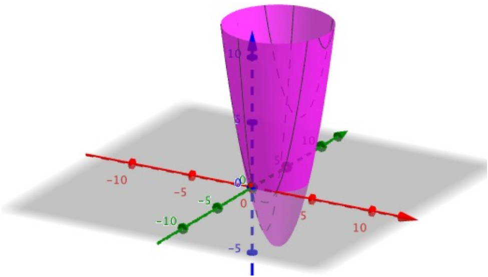
En $(0, 0)$, le gradient s'annule sans que la surface ne présente d'extremum local.

Définition

Un point critique de f est un point où les deux dérivées partielles sont nulles.

Un point critique n'est pas toujours un extremum local mais un extremum local se situe toujours en un point critique.

Exemple : Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Déterminer les points critiques de f.



Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Théorème.

Soit a un point critique de f. On calcule au point a :

$$s^2 - rt = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

1. si $s^2 - rt < 0$, a est un extremum local de f
   - si $r > 0$, a est un minimum local de f.
   - si $r < 0$, a est un maximum local de f.
2. si $s^2 - rt > 0$, a est un point col.
3. si $s^2 - rt = 0$, alors on ne peut pas conclure.

Exemples : Etude des points critiques de

$$f : (x, y) \to xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \text{point critique}(0, 0)$$

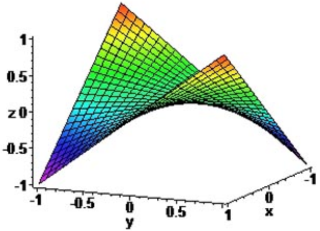
On calcule les dérivées secondes en $(0, 0)$:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Donc en $(0, 0)$

$$s^2 - rt = 1 > 0$$

c'est un point col.



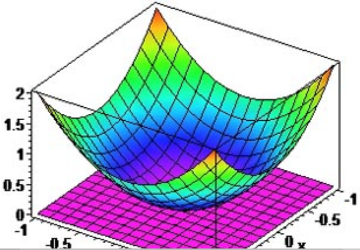
Exercice

Etudier les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \to x^2 + y^2$$

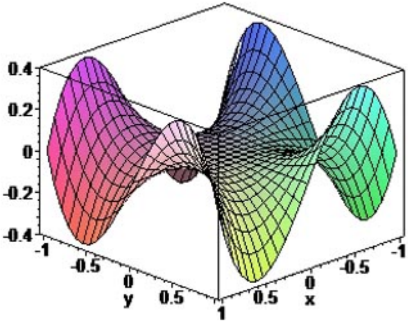
Notions.

- Si f a son gradient (les dérivées partielles premières) en a nul, alors a est un point critique.
- en un point critique $s^2 - rt = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Si $s^2 - rt < 0$, a est un extremum local de f : si $r > 0$, a est un minimum local et si $r < 0$, a est un maximum local.



Remarque : Les points ≪ selles ≫ ne sont pas les seuls points cols.

$$(x, y) \to xy(x-y)(x+y)$$



Et il en reste quoi ?

1. A quelle condition a-t-on $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?
2. Si $f(x, y)$ a un maximum local en a, que se passe-t-il graphiquement ?
3. Et pour le gradient de f ?
4. Dans $s^2 - rt$, que signifie s, r et t ?

Réponses

1. A quelle condition a-t-on $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?

   Si f est $\mathcal{C}^2$.

2. Si $f(x, y)$ a un maximum local en a, que se passe-t-il graphiquement ?
   la surface représentant f reste localement en dessous du plan d'équation $z = f(a)$.

3. Et pour le gradient de f ?
   le gradient est nul.

4. Dans $s^2 - rt$, que signifie s, r et t ?

$$s = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$