Fonctions réelles de deux variables

Plan

Deux variables = un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (plan) dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Deux points du plan $a(x, y)$ et $a'(x', y') \rightarrow$ la distance entre les deux points est

$$aa' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Définition

a un point et $r > 0$

- la boule de centre a et de rayon r sans son bord

$$B(a, r) = \{m \in \mathbb{R}^2, am < r\}$$

  boule ouverte et bornée.

- la boule de centre a et de rayon r avec son bord

$$\overline{B(a, r)} = \{m \in \mathbb{R}^2, am \leqslant r\}$$

  boule fermée et bornée.

Dans le plan $=$ disque. Dans l'espace $=$ boules.

« Boule » , « borné » , « ouvert » et « fermé » $\rightarrow$ topologie.

Définition

Dans le plan ou l'espace, un ensemble E de points est

- bornée : $\forall m, n \in E,\ mn \leqslant K$.
- ouvert $\forall a \in E$, il existe une boule de centre a et de de rayon non nul incluse dans E.
- fermé si son complémentaire est ouvert.

Note : ouvert n'est pas le contraire de fermé !

Plan

Définition

$A \subset \mathbb{R}^2$. Une fonction réelle de deux variables sur A est

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemple : $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 1$ définie sur $\mathbb{R}^2$

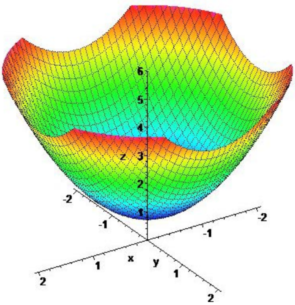
$$f(1,2) = 3 \times 1 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 9$$

Représentation graphique.

On pose $z = f(x,y) \quad \rightarrow \quad$ la surface $\{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in A\}$ dans l'espace.

Exemple :

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$$

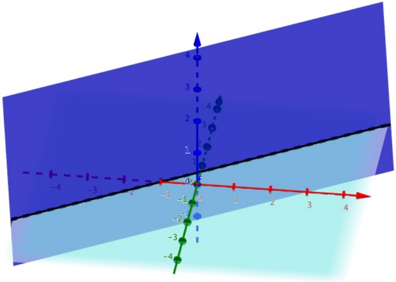


Définition

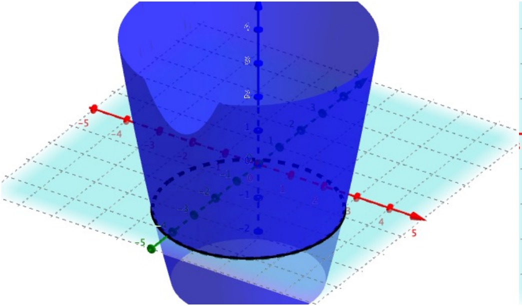
Une courbe plane est l'ensemble des solutions de $f(x, y) = 0$.

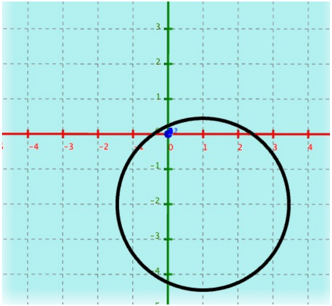
L'égalité $f(x, y) = 0$ est appelée équation cartésienne de la courbe.

Exemples : Pour $f(x, y) = 2x - 3y + 2$: la courbe plane d'équation $2x - 3y + 2 = 0$ est une droite.

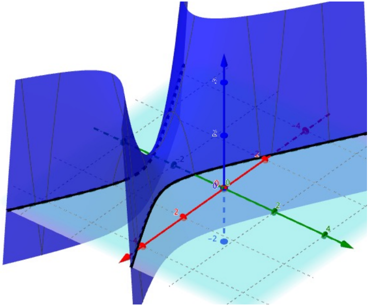


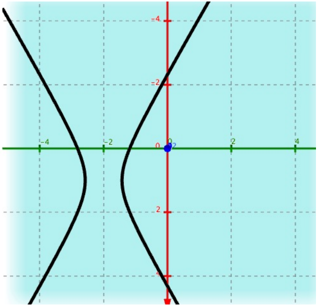
Pour $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 6$, la courbe plane est un cercle.



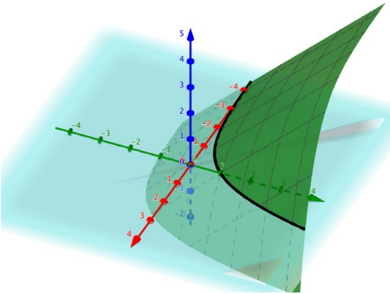


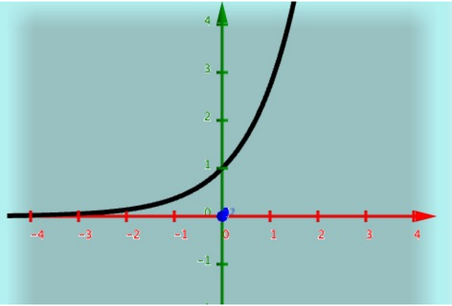
Pour $f(x,y) = (x-1)^2 - 3(y+2)^2 + 1$, la courbe plane est une hyperbole.





f fonction réelle d'une variable, sa courbe est $y = f(x)$. C'est la courbe plane correspondant à l'équation $y - f(x) = 0$.



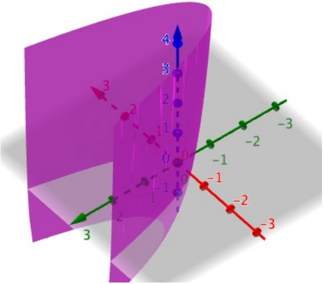


$f(x) = e^x$

Exercice

Soit la fonction $f(x,y) = e^{3x^2-2y} - 2$. Déterminer la courbe plane définie par cette fonction.

Notion. Une courbe plane est l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $f(x,y) = 0$.



Dans toute la suite : f fonction de deux variables définies sur $A \subset \mathbb{R}^2$.
Etude de f :

- limite
- continuité
- dérivabilité
- extrema ou point col

Limite et continuité des fonctions réelles de deux variables

Définition

a un point

$$\lim_{u \to a} f(u) = \ell \qquad \Leftrightarrow$$

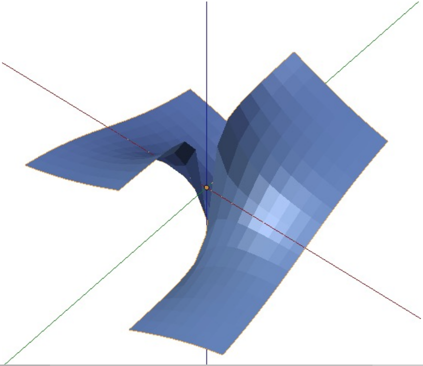
$|f(x,y) - \ell|$ tend vers 0 quand $\|(x,y) - a\|$ tend vers 0.

On dit que f est continue en $a \Leftrightarrow f$ a une limite en a, qui est alors nécessairement $f(a)$.

Définition

f est continue sur $A \Leftrightarrow f$ est continue en tout point de A.
$\mathcal{C}(A, \mathbb{R}) =$ ensemble des fonctions continues sur A.

Exemple : La fonction $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$. Par contre, la fonction $g(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue aux points $(y, 0)$.



Propriété.

Si f et g sont continues sur A, alors $f+g$ et fg sont continues sur A.
Si g ne s'annule pas sur A, alors f/g est continue sur A.

Toutes les fonctions "standards" contenant des polynômes, des fractions, des exponentielles, des fonctions trigonométrique, des logarithmes... en x et y sont continues sur leur ensemble de définition.
Il faudra par contre étudier précisément certains points quand ils ne sont pas définis par une formule standard.

Exemple : $f(x,y) = x^2 \ln(y) - 3e^y$ est définie quand $y > 0$ donc

$$A = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$$

Sur son domaine de définition, la fonction est continue.

Définition

f est bornée sur A :

$$\forall (x,y) \in A, \qquad |f(x,y)| \leqslant M$$

Propriété.

f continue sur$A$ fermée bornée $\quad \Rightarrow \quad$ f est bornée sur A.

De plus,il existe a et b dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f(a)$ est le minimum et $f(b)$ le maximum de f sur A.

Plan

Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Définition

$a \in A$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
f est dérivable en a suivant $\overrightarrow{v}$ si $D_v f(a)$ existe avec

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)}{t}$$

Exemple : Soit $a = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2)$ et $f(x,y) = x^2 y^3$. Montrer que f est dérivable en a suivant $\overrightarrow{v}$ et calculer $D_{\vec{v}} f(a)$.

Définition

Soit $a = (\alpha, \beta)$ un point (fixé) de A.

Les dérivées partielles (premières) de f en a sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = D_{e_1(1,0)} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f((\alpha, \beta) + t(1,0)) - f(\alpha, \beta)}{t}$$

dérivée partielle suivant x.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = D_{e_2(0,1)} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f((\alpha, \beta) + t(0,1)) - f(\alpha, \beta)}{t}$$

dérivée partielle suivant y

Propriété.

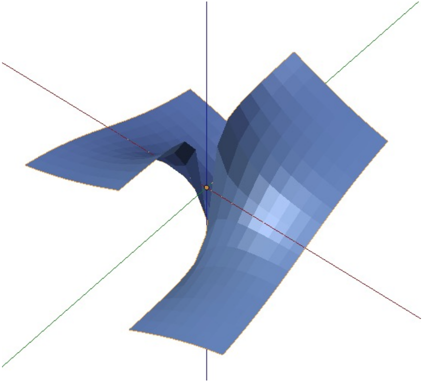
Pour dériver une fonction par rapport à x, on considère y comme une constante et on dérive uniquement le x

Pour dériver une fonction par rapport à y, on considère x comme une constante et on dérive uniquement le y.

Exemple :

$$\begin{array}{rccc}\theta : & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \arctan(\frac{y}{x})\end{array}$$

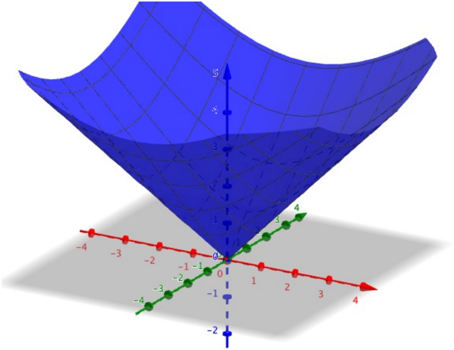
Calculons les dérivées partielles premières de θ.



Exercice

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

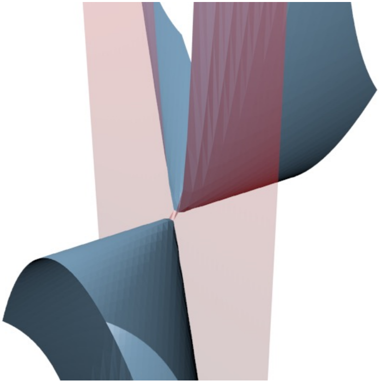
Calculer ses deux dérivées partielles premières.



Exemple :

$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\
 & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}
\end{array}
$$

Calculer les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.



Remarque : Dans ce dernier exemple, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Mais f n'est pas continue en 0 (Par exemple $f(x,x^2) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$).

Pour définir une notion de dérivabilité qui implique la continuité il va falloir demander un peu plus que l'existence des dérivées partielles.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si elle a des dérivées partielles et si les dérivées partielles sont continues sur A.

$\mathcal{C}^1(A)$ ou $\mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

Exemple : Toutes les fonctions standards sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition SAUF la racine carrée et la valeur absolue en 0, les arcsin et arcos en 1 et -1.

Remarque :

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle est continue.
- La somme, le produit et la différence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ est aussi $\mathcal{C}^1$. Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si le dénominateur ne s'annule pas.

Théorème.

Le développement limité de f en $a = (\alpha, \beta)$ à l'ordre 1 est

$$f((x,y)) = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|(x,y)-a\|)$$

Remarque : géométriquement : le plan tangent en a est

$$z = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

$o(\|(x,y)-a\|)$ est l'écart entre $f(x,y)$ et le plan tangent : si (x,y) est proche de a, alors cet écart est "assez petit".

Exercice

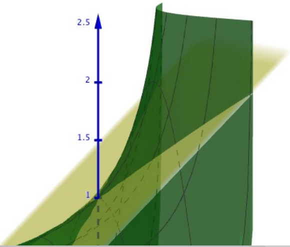
Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ de

$$f : (x,y) \mapsto \frac{\cos(y)}{1-x}$$

En déduire une équation du plan tangent en $(0,0)$ à la surface représentant f.

Notion.

$$f((x,y)) = f(a) + (x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-\beta)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|(x,y)-a\|)$$



Gradient

Définition

Le gradient de f en a est

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Le gradient de f est

$$\begin{array}{rccc} \overrightarrow{\text{grad}}(f): & A & \to & \mathbb{R}^2. \\ & a & \mapsto & \overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) \end{array}$$

Exemple : Expliciter le gradient de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}. \\ (x, y) & \mapsto & x^2 y^3 \end{array}$

Théorème.

f et g de classe $\mathcal{C}^1 \to f+g$, fg , λf de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \overrightarrow{\text{grad}}(g)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f) = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g.\overrightarrow{\text{grad}}(f).$$

Si f ne s'annule pas,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-\overrightarrow{\text{grad}}(f)}{f^2}$$

Théorème.

Si f de classe $\mathcal{C}^1$, la dérivée suivant $v = (h, k)$ est

$$D_v f(a) = \overrightarrow{\text{grad}}(f)(a) \cdot v \qquad \left(= h.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

De plus, en 0 :

$$f(a + tv) = f(a) + D_v f(a)t + o(t)$$

Interprétation géométrique du gradient

k réel fixé. La ligne de niveau k de f est

$$E_k = \left\{(x, y) \in U,\ f(x, y) = k\right\}$$

Sur la ligne de niveau E_k, f est constante. Si on note $\vec{v}$ le vecteur directeur de la ligne de niveau en un point a de cette ligne, on a alors $D_{\vec{v}}f(a) = 0$

$$D_{\vec{v}}f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a) \cdot \vec{v} = 0$$

on a donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a)$ est orthogonal à $\vec{v}$.

En tout point, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

Et il en reste quoi ?

1. Une fonction $f(x, y)$ de deux variables est représentée graphiquement par....
2. Comment calculer la limite en $(1, 2)$ de $f(x, y)$ une fonction continue en $(1, 2)$?
3. Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$?
4. $f(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ signifie....
5. C'est quoi, $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$?

Réponses

1. Une fonction $f(x, y)$ de deux variables est représentée graphiquement par....
   une surface, où $f(x, y)$ est la hauteur du point
2. Comment calculer la limite en $(1, 2)$ de $f(x, y)$ une fonction continue en $(1, 2)$?
   on fait $f(1, 2)$
3. Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$?
   On "fixe" y et on dérive $f(x, y)$ par rapport à x uniquement.
4. $f(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ signifie....
   f a des dérivées partielles par rapport à x et y et elles sont continues.
5. C'est quoi, $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$?
   $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$