# Développements limités

# Plan

# Définition

**Définition**

$f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant 0 ou d'extrémité 0.
$f$ possède un développement limité à l'ordre $n$ en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ pour } x \to 0$$

**Remarque :** $o(x^n)$ pour $x \to 0$ signifie un "reste" inconnu qui tend vers 0 plus vite que $x^n$.
Ce terme doit figurer dans TOUT les calculs, et au bon endroit.

**Exemples :**

- à l'ordre 1 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

- Les polynômes $\rightarrow$ développements limités à tous les ordres.

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

  - $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + o(x^2)$ développement limité à l'ordre 2 en 0
  - $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + o(x^7)$ développement limité à l'ordre 7 en 0

- $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x) \rightarrow$ développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

# Une première formule à savoir.

$$\frac{1}{1-x} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} x^k \ + \ o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n).$$

**Démonstration.**

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x}{1-x}x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

car $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$.

## Définition

$f$ définie sur un $I$ contenant $a$ ou d'extrémité $a$.
$f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

$x \to a$

**Remarque :** Pour faire un développement limité de $f$ en $a$,

1. on pose $x = a + h$ et on remplace dans $f$. Quand $x \to a$, on a $h \to 0$.
2. on fait le développement limité en 0 en $h$.
3. on remplace $h = x - a$... et on ne développe pas les $(x-a)^k$.

# Formule de Taylor-Young

**Notation :** $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est dérivable $n$ fois de suite : $f'$ ($f$ dérivée une fois), $f$" ($f$ dérivée deux fois), $f^{(3)}$ ($f$ dérivée trois fois), $f^{(4)}$ ($f$ dérivée quatre fois), ....

**Théorème.**

$f$ de classe $\mathcal{C}^n$ $\rightarrow$ développement limité à l'ordre $n$ en $a$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \qquad \text{pour} \qquad x \to a$$

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots$$

$$+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$$

**Corollaire.**

Pour $a = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

**Exemple :** La fonction exponentielle est de classe $C^\infty$ et $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

## Exercice

(TD) On considère pour tout $x$ réel

$$f(x) = \exp(2x + 3)$$

1. Calculer $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$
2. En déduire un dl à l'ordre 3 en 0 de $f$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

**Notion.**

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

# Unicité du développement limité

**Propriété.**

Si $f$ a deux développements limités à l'ordre $n$ en 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n),$$

alors les deux développements limités sont les mêmes, autrement dit :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad a_k = b_k$$

# Parité et développement limité en 0

**Propriété.**

- Si $f$ paire, alors son développement limité en 0 ne contient que des puissances paires de $x$.
- Si $f$ impaire, alors son développement limité en 0 ne contient que des puissances impaires de $x$.

**Remarque :** Pas de réciproque : développements limités pairs $\not\Rightarrow$ paire.
Un développement limité = propriété locale !

# Troncature d'un développement limité

**Propriété.**

Si développement limité à l'ordre $n$ en $a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors développement limité en $a$ à l'ordre $p \leqslant n$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + o((x-a)^p)$$

**Exemple :** Pour $f(x) = x^2 + 2x^4 + x^5 + o(x^6)$, la troncature à l'ordre 4 :

$$f(x) = x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

# Substitution.

$x$ remplacé par $g(x)$ $\boxed{\text{à condition que } g(x) \to a}$

**Exemple :** $x \to 0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

On remplace $x$ par $-x$ $(-x \to 0)$ :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

# Intégration

**Théorème.**

$$f(x) = c_0 + c_1\,(x-a)^1 + c_2\,(x-a)^2 + \cdots + c_n\,(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

En primitivant le développement limité terme à terme

$$F(x) = F(a) + c_0\,(x-a)^1 + \frac{c_1\,(x-a)^2}{2} + \frac{c_2\,(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$+ \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

**Remarque :** ne pas oublier la constante d'intégration $F(a)$).

# Dérivation

**Propriété.**

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2\,(x-a)^2 + c_3\,(x-a)^3 + \cdots$$
$$+ c_n\,(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

en dérivant terme à terme le développement limité de $f$ en $a$ :

$$f'(x) = c_1 + 2c_2\,(x-a) + 3c_3\,(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ nc_n\,(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1})$$

**Remarque :** Attention en dérivant : on perd un ordre et le terme constant de $f$ !

**Exemple :**

## Exercice

(TD) On considère $f(x) = \exp(2x+3)$ pour tout $x$ réel. On sait qu'un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f$ est

$$f(x) = e^3 + 2e^3x + 2e^3x^2 + \frac{4e^3}{3}x^3 + o(x^3)$$

1. En déduire un dl à l'ordre 4 de la primitive $F(x) = \int_0^x \exp(2t+3)dt$ de $f$
2. Déterminer un dl à l'ordre 2 de la dérivée de $f$.

**Notion.** On peut dériver et intégrer un développement limité, ne pas oublier $F(a)$ en faisant la primitive.

# Développements limités classiques

**Attention :** $x$ au voisinage de 0 !

$$
\begin{array}{rclllllll}
\exp(x) & = & 1 & +x & +\frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} & +\frac{x^4}{4!} & +\frac{x^5}{5!} & +\cdots+o(x^n) \\
\operatorname{ch} x & = & 1 & & +\frac{x^2}{2!} & & +\frac{x^4}{4!} & & +\cdots+o(x^n) \\
\operatorname{sh} x & = & & x & & +\frac{x^3}{3!} & & +\frac{x^5}{5!} & +\cdots+o(x^n) \\
\cos x & = & 1 & & -\frac{x^2}{2!} & & +\frac{x^4}{4!} & & +\cdots+o(x^n) \\
\sin x & = & & x & & -\frac{x^3}{3!} & & +\frac{x^5}{5!} & +\cdots+o(x^n)
\end{array}
$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + o(x^n)$$

**Remarque :** On part de $\frac{1}{1-x}$ et on remplace $x$ par $-x^2$ pour obtenir $\frac{1}{1+x^2}$. Puis on intègre pour obtenir l'arctan.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

**Exemple :** Pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

**Remarque :** Si on a besoin de plus que l'ordre 5, on fait un développement limité de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ avec la formule $(1+x)^\alpha$ et en remplaçant $x$ par $-x^2$. Puis on intègre pour avoir l'arcsin ou l'arccos.

# Plan

# Le formulaire non-officiel des o().

Les développements limités sont de véritables égalités à conditions qu'on sache gérer les $o(x^n)$.

$o$ "avale" tout ce qui est superflu, sauf la puissance de $x$.

$o(x^0) = o(1)$ quantité qui tend vers 0 en 0.

$$o(-x^n) = o(x^n), \qquad o(ax^n) = o(x^n), \qquad ao(x^n) = o(x^n)$$

$$n \leqslant p \quad \to o(x^n) \pm o(x^p) = o(x^n), \qquad o(x^n) \pm ax^p = o(x^n)$$

$$o(x^n) \times o(x^p) = o(x^{n+p}), \qquad o(x^n) \times x^p = o(x^{n+p}), \qquad \frac{o(x^n)}{x^p} = o(x^{n-p})$$

# Opérations simples :

Additions, soustractions et multiplication avec des développement limités à la main.
Le plus petit $o(x^n)$ avale toutes les puissances plus grandes que lui.

**Exemple :** Développement limité à l'ordre 3 de

$$e^x + e^{-x}, \qquad (2+x)e^x$$

**Exercice**

Ecrire un développement limité à l'ordre 1 en 0 de toutes les fonctions présente dans la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\sin(x) + \mathrm{e}^x - 1}$ et simplifier. En déduire la limite de $f$ en 0.

# Développement limité d'une composée

Calculer le dl à l'ordre $n$ de $f \circ u$ en $a$.
On commence par $u$ : ordre $n$, $x \to a$ :

$$u(x) = u(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Puis

$$f \circ u(x) = f(u(x))$$

$$= f\left(\underbrace{u(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n}_{y} + o((x-a)^n)\right)$$

on prend le dl à l'ordre $n$ de $f$ en $b = u(a)$

$$f(y) = d_0 + d_1(y-b) + d_2(y-b)^2 + \cdots + d_n(y-b)^n + o((y-b)^n).$$

Comme $u(a) = b$,

$$y - b = c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

et on remplace

$$f \circ u(x) = d_0 + d_1\Big(c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n\Big)$$

$$+d_2\Big(c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n\Big)^2 + \cdots$$

$$+d_n\Big(c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n\Big)^n + o((x-a)^n).$$

On développe les parenthèses en ne conservant (et en ne calculant !) que les termes de puissances inférieure à $n$.

**Exemple :**

1. développement limité d'ordre à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $g : x \mapsto e^{\sin(x)}$.
2. développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de $g : x \mapsto \ln(\cos(x))$.

# Et il en reste quoi ?

1. Le développement limité suivant est à quel ordre ?

$$f(x) = 1 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + o(x^4)$$

2. $2o(x^4) + 5o(x^6) = \ldots$
3. La formule $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ est le début du développement limité de quelle fonction ?
4. Les formules de développements limités des fonctions standards sont valables pour ... ?
5. Les développements limités sont compatibles avec quelles opérations ?

# Réponses

1. ordre 4.
2. $o(x^4)$
3. Exponentielle $e^x$
4. $x$ au voisinage de 0
5. Toutes ! Addition/soustraction, multiplication / division, composé, primitive et dérivée.

# Développement limité d'un quotient

**Propriété.**

Soit $f$ et $g$ ayant un développement limité en $a$.

Si $\boxed{\lim_{x \to a} g(x) \neq 0}$ alors $\frac{f}{g}$ a un développement limité en $a$.

## Technique :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \cdots + d_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}$$

Si $d_0 \neq 0$, factoriser par $d_0$ :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{d_1}{d_0}(x-a) + \frac{d_2}{d_0}(x-a)^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_0}(x-a)^n + o((x-a)^n)}_{y}}.$$

$$= \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots + (-1)^n y^n + o(y^n).$$

avec

$$y = \frac{d_1}{d_0}(x-a) + \frac{d_2}{d_0}(x-a)^2 + \cdots + \frac{d_n}{d_0}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

et on développe !

**Exemple :**

Le dl de tan à l'ordre 5 en 0 est

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

**Remarque :** Si $\lim_{x \to a} g = 0$, il faut voir si des puissances peuvent se simplifier avant de faire cette méthode. Sinon, pas de dl.

**Exemple :** ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$$

# Plan

# Recherche de limites et d'équivalents

$f$ est équivalent au premier terme
non nul de son développement limité.

**Exemple :**

1. Chercher un équivalent en 0 de

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1$$

en déduire

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1}{x^2}$$

2. Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x(x+1)}{1+x^2}.$$

## Exercice

(TD) A l'aide d'un développement limité, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(5x)}{\sin(x) + \sin(5x)}$$

**Notions.** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ quand $x \to 0$

# Recherche de tangente

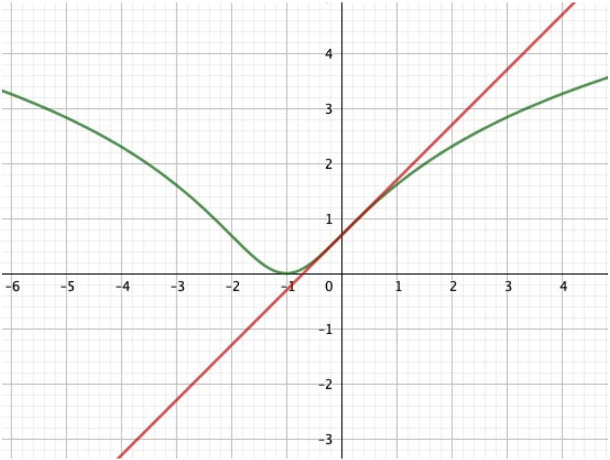
Si une fonction $f$ possède un DL d'ordre 1 au voisinage de $a$ :

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a)}_{T} + o(x-a)$$

$\boxed{T \text{ est l'équation de la tangente à la courbe de } f \text{ au point } a}$

Position de la courbe par rapport à $T$ = étude du signe de $f - T$
$\Rightarrow$ faire un dl d'ordre supérieur

**Exemple :** Déterminer la tangente en 0 de la fonction
$f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

## Exercice

(TD)

1. Calculer le dl à l'ordre 4 en 0 de $\cos x + \operatorname{ch} x$.
2. En déduire la tangente à la courbe de $x \to \cos x + \operatorname{ch} x$ au point $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

**Notions.**

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ quand $x \to 0$ et
  $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ quand $x \to 0$.
- La tangente est le terme constant + le terme en $x$ du développement limité. La position est donnée par le terme suivant.

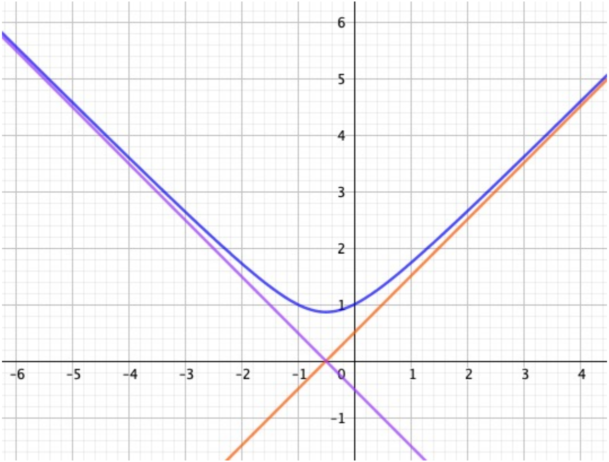
# Recherche d'une asymptote

Quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $h = \frac{1}{x} \to 0$ On peut alors utiliser un DL en $h$

**Exemple :** Trouver les asymptotes de la courbe représentative de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + x + 1} \end{array}$$

et les placer par rapport à cette courbe.


6
5
4
3
2
1
-1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

# Et il en reste quoi ?

1. Quelle est la formule de base à utiliser pour faire le développement limité d'un quotient ?
2. Si $f(x) = 2 - 5(x-3) + 3(x-3)^2 + o((x-3)^2$, quelle tangente peut-on déduire ?
3. Pour chercher une asymptote en $x \to +\infty$ avec un développement limité, il faut poser $h = \dots$ ?
4. Justement, on trouve à la fin $f(x) = 7x + \frac{5}{x^2} - 9 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Quelle est l'asymptote ?

# Réponses

1. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$ ou $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
2. la tangente au point $x = 3$ est $y = 2 - 5(x - 3)$
3. On pose $h = \frac{1}{x}$ et on fait un développement limité pour $h \to 0$.
4. $y = 7x - 9$