Déterminants

Plan

$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ e & f & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ une matrice carrée

Le déterminant de A se note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots \\ e & f & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

c'est un nombre.

Déterminant de taille 1

$$A = (a)$$

son déterminant

$$\det(A) = a$$

Déterminant de taille 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

son déterminant

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Déterminant de taille 3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

son déterminant par la règle de Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

$\rightarrow$ développement en ligne ou colonne....... précédé de quelques opérations de simplification.

Technique du développement en ligne ou en colonne.

On choisit UNE ligne OU UNE colonne (entourez-la !).
On suit la ligne ou colonne, coefficient par coefficient.

$$\det = (*1)(*2)(*3) + (*1)(*2)(*3) + (*1)(*2)(*3) + \cdots$$

1. un signe $+$ ou $-$

$$\begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ (-) & (+) & (-) \\ (+) & (-) & (+) \end{vmatrix}$$

2. le coefficient
3. le déterminant de départ où on a enlevé la ligne et la colonne du coefficient.

Déterminant d'une matrice carrée de taille n

$\boxed{\text{développement en ligne et en colonne}}$ (valable quelque soit la taille de la matrice).

Exemple : Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété.

déterminant d'une matrice triangulaire = produit des coefficients diagonaux.
déterminant d'une matrice diagonale = produit des coefficients diagonaux.
matrice contenant une colonne ou une ligne de zéros = déterminant nul.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 2 & 24 & -78 \\ 0 & -3 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) \times 1 = -6$$

Pour simplifier le calcul :

1. faire apparaître des 0 dans certaines lignes ou colonnes par des opérations de type "pivot".
2. faire un développement en choisissant une ligne ou colonne avec plein de 0

Opérations sur les lignes et colonnes

uniquement dans un déterminant

- $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ multiplie le déterminant par α.
- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ne change pas le déterminant
- $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant
- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie le déterminant par α.
- $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ ne change pas le déterminant

$\rightarrow$ uniquement des $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ pour éviter les problèmes.

$\rightarrow$ On peut arriver à faire disparaitre tout sauf la diagonale... mais ce n'est pas la peine !

Exemple : On calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Exercice

(TD) Faire successivement les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$ sur le déterminant suivant, puis développer selon la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 9 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, une famille de n vecteurs $(V_1, V_2, \dots, V_n)$.

1. Coordonnées de $V_1, V_2, \dots, V_n$ dans la base $\mathcal{B}$
2. Mise en colonne côte à côte $\rightarrow$ matrice de la famille
3. déterminant de la matrice

$$\Rightarrow \qquad \det_{\mathcal{B}}(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

déterminant de la famille dans la base $\mathcal{B}$

Remarque : c.f géométrie début d'année.

Plan

Propriété fondamentale

Théorème.

A est inversible $\quad\Leftrightarrow\quad \det A \neq 0$

Corollaire.

- Une famille de vecteurs est une base $\Leftrightarrow$ son déterminant est non nul.
- Une application linéaire est bijective $\Leftrightarrow$ le déterminant de sa matrice est non nul

Propriété.

$$\det(AB) = \det A \times \det B$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$\det({}^tA) = \det A$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Déterminant par bloc

Propriété.

A, B deux blocs carrés de nombre et C un bloc rectangle

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B) \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} B & 0 \\ C & A \end{vmatrix} = \det(B)\det(A).$$

Exemple : Factoriser le polynôme

$$P : \lambda \to P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -613 & 1239 & -521 \\ 1 & 1-\lambda & -234 & -32 & 12 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 7-\lambda & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

Et il en reste quoi ?

1. $\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \ldots ?$
2. Comment simplifier le calcul d'un déterminant ?
3. Si le déterminant d'une famille de vecteur est nul, alors cette famille est...
4. Parmi ces opérations de colonnes, lesquelles ne changent pas la valeur du déterminant ?

$$C_j \leftarrow \alpha C_j; \quad C_j \leftarrow C_j + \alpha C_k; C_j \leftrightarrow C_k;$$

Réponses

1. $eh - fg$.
2. En utilisant des opérations de ligne/colonne pour faire apparaître quelques 0
3. pas une base
4. $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_k$ uniquement !