Nombres complexes et géométrie

Plan

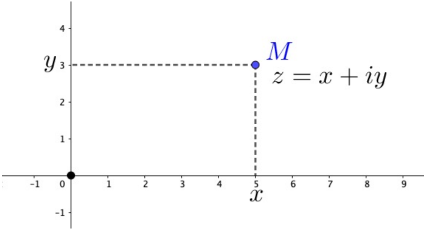
1. Vecteurs du plan et complexe

2. Transformations du plan
   - Transformations courantes
   - Les transformations $z \mapsto az + b$ du plan complexe
   - Deux autres transformations

Forme algébrique et coordonnées cartésiennes.

Dans le plan avec repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

point M de coordonnées $(x, y) \Leftrightarrow$
complexe $z \quad = \quad x \ + \ iy$ (affixe de M).

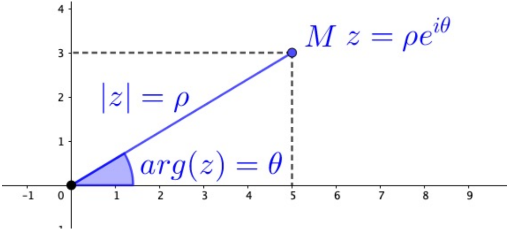


Exemple : Droite $\mathcal{D}$: $y = ax + b$ avec a, b des réels. Si $M(x, y) \in \mathcal{D}$, alors $y = ax + b$ donc $z = x + i(ax + b)$.

Forme exponentielles et coordonnées polaires.

- Module $\rho = |z| \Leftrightarrow$ distance OM $\boxed{\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$
- Argument $\theta = arg(z) \Leftrightarrow$ angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$

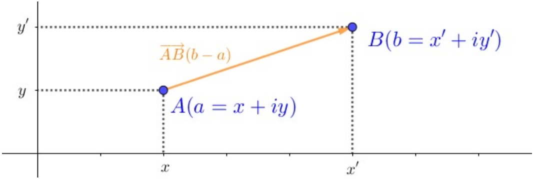
$$\boxed{\cos\theta = \frac{x}{\rho}} \text{ et } \boxed{\sin\theta = \frac{y}{rho}}$$



Propriété.

Deux points $A(a)$ et $B(b)$:

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.
- Le module $|b - a| = AB$ (distance)
- argument $arg(b - a) =$ angle $(Ox, \overrightarrow{AB})$

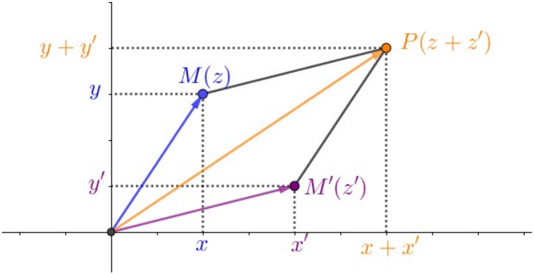


Somme de deux nombres complexes.

Deux points $M(z = x + iy)$ et $M'(z' = x' + iy')$.
On pose P tel que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

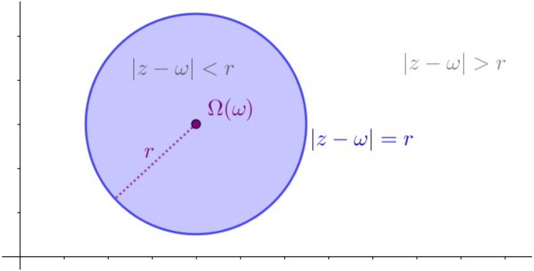
$\Rightarrow z_P = (x + x') + i(y + y') = z + z'$.



Cercle et disque en complexe

$\Omega(\omega)$ et $r > 0$.

- $M(z)$ sur le cercle de centre Ω et de rayon $r \Leftrightarrow |z - \omega| = r$.
- $M(z)$ sur le disque intérieur $\Leftrightarrow |z - \omega| < r$
- $M(z)$ à l' extérieur du cercle $\Leftrightarrow |z - \omega| > r$.



Module et argument en géométrie

Propriété.

$A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ quatre points.

$$\frac{CD}{AB} = k \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d-c}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

Démonstration. $\overrightarrow{AB}(b-a)$ et $\overrightarrow{CD}(d-c)$.

- Pour les distances,

$$\frac{CD}{AB} = \frac{|d-c|}{|b-a|} = \left|\frac{d-c}{b-a}\right|$$

- Pour l'angle,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CD})$$

$$= -\arg(b-a) + \arg(d-c) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

Finalement

$$\frac{d-c}{b-a} = \left|\frac{d-c}{b-a}\right| \exp\left(i \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\right)$$

Corollaire.

1. A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{b-c}{a-c}$ est un réel.
2. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{d-c}$ est imaginaire pur.

Démonstration.

1. $\dfrac{b-c}{a-c}$ est un réel $\Leftrightarrow \theta = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 0$ ou $\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ les points sont alignés.
2. $\dfrac{b-a}{d-c}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \theta = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = \pm\pi/2. \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Exercice

(TD) On considère les points A, B, C de coordonnées respective $(2, -3)$, $(-1, 3)$ et $(1, -1)$. Donner les affixes a, b, c des points et montrer que A, B, C sont alignés.

Notions.

- Un point M de coordonnées (x, y) est associé au complexe $z = x + iy$, qu'on appelle affixe de M.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si le quotient $\dfrac{b-c}{a-c}$ est un nombre réel.

Plan

Une transformation du plan est une fonction bijective

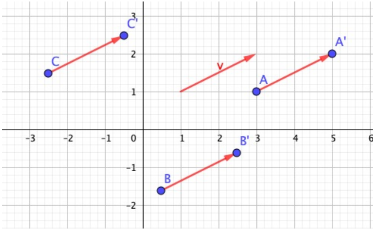
$$f : M \to f(M) = M'$$

$M \to z$ et $M' \to z'$ $\Rightarrow$ une fonction complexe bijective $f(z) = z'$.

M est invariant par f $\Leftrightarrow$ $f(M) = M$

Translation de vecteur $\overrightarrow{v}$

$$M' = t_{\overrightarrow{v}}(M) \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}.$$



Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, pas de point invariant.

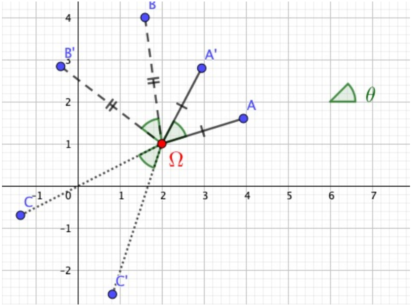
En complexe : v l'affixe de $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad z' - z = v \quad \Leftrightarrow \quad z + v = z'$$

$$t_{\overrightarrow{v}}(z) = z + v$$

Rotation de centre Ω et d'angle orienté θ :

$$M' = r_{\Omega,\theta}(M) \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta. \end{array} \right.$$



Ω unique point invariant.

$$M' = r_{\Omega,\theta}(M) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta. \end{cases}$$

En complexe,ω l'affixe de Ω.

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = \frac{\Omega M'}{\Omega M} e^{i(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = 1e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega = e^{i\theta}z + \omega(1 - e^{i\theta})$$

Donc la fonction de rotation est

$$r_{\Omega,\theta}(z) = e^{i\theta}z + \omega(1 - e^{i\theta})$$

Exercice

(TD) Soit A point du plan de coordonnées $(1,1)$ calculer les coordonnées de A' image de A par :

1. La translation de vecteur $\vec{v}(2,-3)$.
2. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$

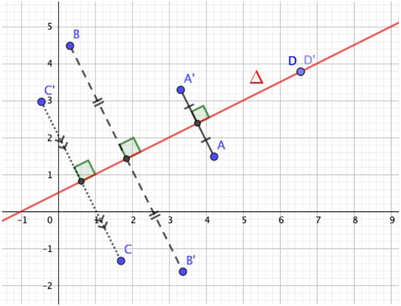
Notions.

- $$\left(\frac{CD}{AB} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d-c}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{i\theta}\,.$$
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

Symétrie orthogonale (réflexion) d'axe Δ :

$$M' = S_{\Delta}(M)$$

tel que Δ est la médiatrice du segment $[MM']$



Les points invariants $= \Delta$

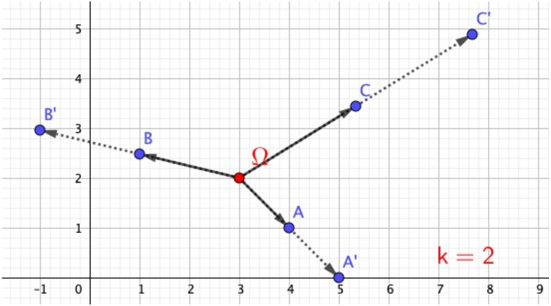
Les translations, les rotations et les symétries sont des isométries

$$A'B' = AB$$

(conservation des distances)

Homothétie de centre Ω et de rapport k

$$M' = h_{\Omega,k}(M) \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$



point invariant Ω

$\Omega(\omega)$

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \quad \Leftrightarrow \quad z' - \omega = k(z - \omega)$$

$$h_{\Omega,k}(z) = kz + \omega(1 - k)$$

Les homothéties ne sont pas des isométries mais des similitudes.

Exercice

(TD) Soit A point du plan de coordonnées $(1,1)$ calculer les coordonnées de A' image de A par l'homothétie de centre $\Omega(-1,0)$ et de rapport 3.

Notion.

$$\left(\frac{CD}{AB} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d-c}{b-a} = k\, \mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

Et il en reste quoi ?

1. Si a est l'affixe du point A et b celui de B, quelle est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$?
2. Quel est l'affixe du point D tel que $OADB$ soit un parallèlogramme ?
3. Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c. On sait que $AB = 2$, $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{5}$. Que vaut $\frac{c-a}{b-a}$?
4. Quelle est l'image de A d'affixe $5 + 3i$ par la translation de vecteur $(-1, 2)$?
5. Quelle est l'image de A d'affixe $5 + 3i$ par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$?

Réponses

1. $b - a$
2. règle du parallèlogramme, l'affixe de D est $a + b$.
3. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$
4. le point d'affixe $5 + 3i + (-1 + 2i) = 4 + 5i$.
5. le point d'affixe $(5 + 3i) \times e^{i\frac{\pi}{2}} = (5 + 3i)i = -3 + 5i$.

Les transformations $z \mapsto az + b$

$$f(z) = az + b$$

quelle géometrie ?

Cas particulier : $f(z) = az$ avec $a \neq 0$

Théorème.

- Si a réel $\rightarrow$ homothétie de centre O et de rapport a.
- Si $|a| = 1$ $\rightarrow$ rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg(a)$.
- Autres cas $\rightarrow$ composée
  - de l'homothétie (centre O, rapport $|a|$)
  - et de la rotation (centre O et d'angle $\theta = \arg(a)$)

.

Démonstration. $M(z)$ et son image $M'(z')$

$$z' = f(z) = az$$

- Si a est réel.

$$z' = az \quad \Leftrightarrow \quad (z' - 0) = a(z - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM}$$

$M(z)$ et son image $M'(z')$

$$z' = f(z) = az$$

- Si $|a| = 1$, alors $a = e^{i\theta}$.

$$z' = e^{i\theta}z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'-0}{z-0} = e^{i\theta} = 1e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{OM'}{OM} & = & 1 \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) & = & \theta \end{array} \right.$$

Donc M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg a$.

$M(z)$ et son image $M'(z')$

$$z' = f(z) = az$$

- Autre cas. Forme exponentielle $a = |a|e^{i\theta}$.

$$z' = |a|e^{i\theta}z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'-0}{z-0} = |a|e^{i\theta} = \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{OM'}{OM} & = & |a| \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) & = & \theta \end{array} \right.$$

M' est l'image de M par la composition de la rotation de centre O et d'angle $\theta = \arg a$ et l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$.

Le cas général

Théorème.

La transformation $f(z) = az + b$ est une similitude directe.

- $a = 1 \Leftrightarrow$ translation
- $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ homothétie
- $|a| = 1 \Leftrightarrow$ rotation
- Sinon, c'est une composée d'homothétie et de rotation.

Technique : Déterminer la nature de $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$.

- Si $a = 1$ et $b = 0 \to f(z) = z$ identité du plan.
- Si $a = 1$ et $b \neq 0 \to f(z) = z + b$ translation de vecteur $\overrightarrow{v}(b)$
- Si $a \neq 1$, on résout $az + b = z$ $\to$ solution ω affixe du seul point fixe Ω.

On a Ω point fixe de $f(z) = az + b$. $M(z)$ et son image $M'(f(z))$.

$$\Big(f(z) = az + b\Big) - \Big(\omega = a\omega + b\Big)$$

$$f(z) - \omega = a(z - \omega).$$

$$\frac{f(z) - \omega}{z - \omega} = a = |a| \, \mathrm{e}^{i \arg(a)} .$$

$$\begin{cases} \Omega M' = |a| \times \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg(a). \end{cases}$$

Donc f est la composée

$$f = r \circ h = h \circ r$$

- h homothétie de centre Ω et de rapport $k = |a|$
- r rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \arg(a)$.

Exercice

(TD) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 3e^{i\frac{\pi}{5}}z$. Décrire f géométriquement.

Notions

$$\left(\frac{CD}{AB} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d-c}{b-a} = k\,\mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

Remarque : Après application de f :

1. deux droites parallèles $\to$ deux droites parallèles ;
2. cercle de centre A et de rayon r $\to$ cercle de centre $f(A)$ et de rayon λr
3. barycentre de $\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$ $\to$ barycentre de $\{(f(A_1), \alpha_1), \ldots, (f(A_n), \alpha_n)\}$.

Deux autres transformations

Définition

l'inversion géométrique de centre O et de rapport 1 est

$$\varphi(z) = \frac{1}{(\overline{z})}$$

Pour $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$$

Elle conserve l'argument et inverse le module.

Propriétés

les points $O, M(z)$ et $M(\varphi(z))$ sont alignés

Démonstration.

$$\frac{\varphi(z)-0}{z-0}=\frac{\varphi(z)}{z}=\frac{1}{\bar{z}z}=\frac{1}{|z|^2}\in\mathbb{R}$$

L'image d'une droite $\mathcal{D}$ passant par O (mais privée de O) est elle-même.

Démonstration.

- Si $\mathcal{D}$ axe des ordonnées.

$$M(0, y) \in \mathcal{D} \to z = iy.$$

$$M' \to \varphi(z) = \frac{1}{-iy} = i\frac{1}{y} \in \mathcal{D}$$

et quand y parcourt $\mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{y}$ aussi. Donc toute la droite.

- Si $\mathcal{D} \neq$ axe des ordonnées, alors équation $y = ax$

$$M(x, ax) \in \mathcal{D} \to z = x + iax = x(1 + ia),$$

$$M' \to \varphi(z) = \frac{1}{x(1 - ia)} = \frac{1 + ia}{x(1 + a^2)} = \frac{1}{x(1 + a^2)}(1 + ia) = x'(1 + ia)$$

Quand x parcourt $\mathbb{R}^*$, x' parcourt $\mathbb{R}^*$ aussi, donc toute la droite.

L'image d'une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O est un cercle.

Démonstration. si non verticale équation $y = ax + b$

$$M(x, ax+b) \in \mathcal{D} \to z = x + i(ax+b)$$

Donc M' a pour affixe

$$M' \quad \varphi(z) = \frac{1}{x - i(ax+b)} = \frac{x + i(ax+b)}{x^2 + (ax+b)^2} = x' + iy'$$

avec

$$x' = \frac{x}{x^2 + (ax+b)^2}, \qquad y' = \frac{(ax+b)}{x^2 + (ax+b)^2}$$

Considérons l'équation de cercle de centre $\Omega\left(\frac{a}{2b}, \frac{1}{2b}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{a^2+1}{4b^2}}$

$$\left(X + \frac{a}{2b}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{a^2+1}{4b^2}$$

$$X^2 + Y^2 + \frac{a}{b}X - \frac{1}{b}X = 0$$

On reporte

$$x' = \frac{x}{x^2 + (ax+b)^2}, \qquad y' = \frac{(ax+b)}{x^2 + (ax+b)^2}$$

dans cette équation de cercle

$$(x')^2 + (y')^2 + \frac{a}{b}x' - \frac{1}{b}y' = \frac{x^2 + (ax+b)^2}{(x^2 + (ax+b)^2)^2} + \frac{\frac{a}{b}x - \frac{ax+b}{b}}{x^2 + (ax+b)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2 + (ax+b)^2} - \frac{1}{x^2 + (ax+b)^2} = 0$$

Donc M' est bien sur ce cercle.

On a aussi :

- l'image d'un cercle passant par O (mais privé de O) est une droite ne passant pas par O,
- l'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.

Définition

L'inversion complexe est

$$\psi(z) = \frac{1}{z}$$

Pour $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$,

$$\psi(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

change l'argument en son opposé et inverse le module.

Et il en reste quoi ?

1. Quel est le point important à déterminer pour étudier la transformation géométrique $f(z) = az + b$?

Réponses

1. Le point fixe ω tel que $f(\omega) = \omega$.