Plan

1. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Définition

Une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants est

$$(E): \qquad \forall t \in I, \quad ay'' + by' + cy = d(t),$$

avec a, b, c constantes, $a \neq 0$, d une fonction continue et y une fonction **inconnue**.

Une solution de (E) est une fonction qui marche dans l'équation. Le graphe d'une solution est une courbe intégrale de (E).

Résolution d'une équation différentielle linéaire

1. solutions y_h de l'équation homogène
2. solution particulière y_p
3. $y = y_h + y_p$
4. conditions initiales

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = d(t)$$

Définition

L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_h) : \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Etape 1 : Résolution de l'équation homogène

$$(E_h) : \; ay'' + by' + cy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ar^2 + br + c = 0$$

équation caractéristique

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ deux racines réelles r_1 et r_2.

$$y_h(t) = \lambda \, e^{r_1 t} + \mu \, e^{r_2 t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ racine double r_0.

$$y_h(t) = (\lambda t + \mu) \, e^{r_0 t} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ deux racines complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$.

$$y_h(t) = e^{\alpha t} \left(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t) \right) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Remarque : (sciences physiques)

$$y_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\right) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

peut se mettre sous la forme

$$y(t) = R\,\mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \qquad \text{avec } (R, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Exercice

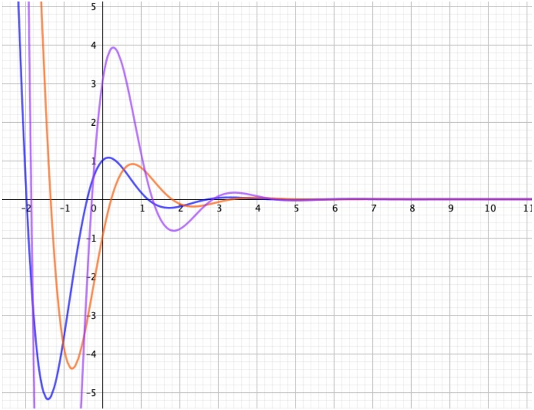
Trouver les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle homogène

$$(E_h) : \; y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Notions.

- L'équation caractéristique est $ar^2 + br + c = 0$. Δ son discriminant.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_h(t) = e^{\alpha t}\left(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\right) \qquad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$



5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Etape 2 : Solution particulière

$$(E): \qquad ay'' + by' + cy = d(t).$$

solution particulière de (E) :

- Une constante ou autre fonction évidente
- Si le second membre est un produit de polynômes, exponentielle et/ou cosinus, sinus simple. on sait faire.
- sinon... on ne sait pas faire.

$\boxed{ay'' + by' + cy = P(t)\,\mathrm{e}^{mt}}$ avec P polynôme et m constante.

L'équation caractéristique est $ar^2 + br + c = 0$. On compare ses racines avec m.

- Si m n'est pas une racine : $\boxed{y_p(t) = R(t)\,\mathrm{e}^{mt}}$
- Si m est une racine simple $\boxed{y_p(t) = t \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}}$
- Si m est la racine double $\boxed{y_p(t) = t^2 \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}}$

où R est un polynôme inconnu de même degré que P dans tous les cas.

Remarque : Si le second membre est $P(t) \to P(t)e^{0t}$.

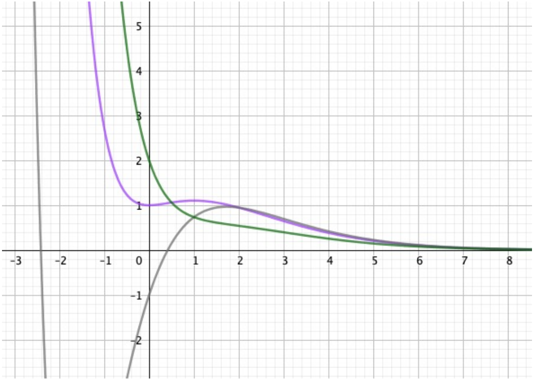
Exercice

Résoudre l'équation différentielle

$$(E): \; y'' + 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Notions.

- L'équation caractéristique est $ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta = 0$, elle a une unique racine réelle r_0 (racine double) et $y_h(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{r_0 t}$.
- Si le second membre est $P(t)\,\mathrm{e}^{mt}$, avec m la racine double de l'équation caractéristique, on pose $y_p(t) = t^2 \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ avec R polynôme inconnu de même degré que P.


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8

$\boxed{ay'' + by' + cy = P(t)\cos(mt) \text{ ou } P(t)\sin(mt)}$ avec P polynôme et m constante.

$$y \to z, \quad \cos(mt) \to e^{imt}, \quad \sin(mt) \to e^{imt}$$

$\Rightarrow$ nouvelle équation complexe

$$(E_{\mathbb{C}}) \qquad az'' + bz' + cz = P(t)\,\mathrm{e}^{imt}$$

solution particulière $\boxed{z_p}$ grâce à la méthode précédente.

On revient dans $\mathbb{R}$:

- Si le second membre était $P(t)\cos(mt)$, alors $\boxed{y_p = \mathrm{Re}(z_p)}$
- Si le second membre était $P(t)\sin(mt)$, alors $\boxed{y_p = \mathrm{Im}(z_p)}$

$\boxed{ay'' + by' + cy = P(t)\cos(mt)e^{kt} \text{ ou } P(t)\sin(mt)e^{kt}}$ avec P polynôme et m constante.

$$y \to z, \quad \cos(mt) \to e^{imt}, \quad \sin(mt) \to e^{imt}$$

$\Rightarrow$ nouvelle équation complexe

$$(E_{\mathbb{C}}) : \; az'' + bz' + cz = P(t)\,\mathrm{e}^{(k+im)t}\,.$$

On trouve $\boxed{z_p}$

On revient dans $\mathbb{R}$:

- Si le second membre était $P\,(t)\,\mathrm{e}^{kt}\cos\,(mt)$, alors $\boxed{y_p = \mathrm{Re}(z_p)}$
- Si le second membre était $P\,(t)\,\mathrm{e}^{kt}\sin\,(mt)$, alors $\boxed{y_p = \mathrm{Im}(z_p)}$

Principe de superposition

$$(E) : ay'' + by' + cy = b_1(t) + b_2(t)$$

1. y_{p1} solution particulière de $ay'' + by' + cy = b_1(t)$.
2. y_{p2} solution particulière de $ay'' + by' + cy = b_2(t)$.
3. $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

Etape 3 : Solutions de l'équation (E)

Propriété.

Les solutions sont

$$y = y_p + y_h$$

avec

- y_h les solutions de l'équation homogène associée
- y_p une solution particulière

Etape 4 : conditions initiales

Propriété.

- $ay'' + by' + cy = d(t)$
- $y(t_0) = y_0$
- $y'(t_0) = y'_0$

$\Rightarrow$ solution unique (constante, λ, μ uniques)

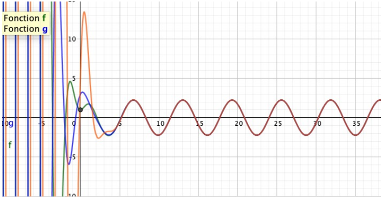
Exercice

Résoudre (E) : $y'' + 2y' + 5y = 10\cos t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

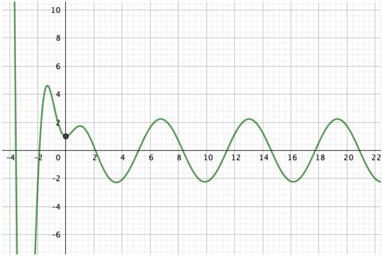
Notions.

1. On a déja fait $\Delta < 0$, $r = -1 \pm 2i$ et $y_h(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t))e^{-t}$
2. Particulière : on passe en complexe en remplaçant y par z et $\cos(mt)$ par e^{imt}.
3. Second membre Pe^{kt} : si k n'est pas une racine de l'équation caractéristique , alors $z_p = Re^{kt}$ où R est inconnu de même degré que P. Ensuite $y_p = \Re(z_p)$
4. $y = y_h + y_p$
5. Les conditions initiales permettent de déterminer a et b

Plusieurs courbes intégrales avec des valeurs de constantes différentes



La bonne fonction



Et il en reste quoi ?

1. Quelles sont les solutions de $ay" + by' + c = 0$ quand $\Delta = b^2 - 4ac > 0$?
2. Si le second membre d'une équation linéaire du second ordre est $(4x^2 + 2)e^{3x}$ (avec 3 racine simple de l'équation caractéristique) comment poser une solution particulière y_p ?
3. Et après avoir posé y_p, on fait quoi ?
4. Comment déterminer les constantes dans les solutions d'une équation différentielle ?

Réponses

1. $y_h = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec r_1, r_2 les deux racines du polynôme caractéristique.
2. $y_p = x(ax^2 + bx + c)e^{3x}$
3. On reporte dans l'équation et on déterminer a, b, c.
4. En utilisant les conditions intiales.