Équations différentielles linéaires

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Introduction

Dans tout le cours, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition

f définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable $\Leftrightarrow$ sa partie réelle et sa partie imaginaire sont dérivables :

$$f' = (\mathrm{Re}(f))' + \mathrm{i}\,(\mathrm{Im}(\mathrm{f}))'$$

Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \ln(t) + i\cos(t) \end{array}$$

f est dérivable :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f'(t) = \frac{1}{t} - i\sin(t)$$

Propriété.

$a \in \mathbb{C}$.
$f(t) = \mathrm{e}^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = a\,\mathrm{e}^{at}$$

Les règles usuelles de dérivation (somme, produit...) sont valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Résolution d'une équation différentielle linéaire (E)

0. Observer l'ordre (la plus grande dérivée) et organiser (E).
1. Résoudre l'équation homogène $\Rightarrow y_h$
2. "deviner" la forme d'une solution particulière y_p. Reporter y_p dans l'équation (E). $\Rightarrow y_p$
3. $y = y_h + y_p$
4. Conditions initiales

Plan

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition

équation différentielle linéaire du premier ordre sur I

$$(E): \qquad \forall t \in I, \quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t),$$

avec

- α, β, γ fonctions continues sur I
- y fonction inconnue. ($y = y(t)$ et $y' = y'(t)$)

Une solution de (E) sur I est une fonction qui marche dans l'équation. Le graphe d'une solution est une courbe intégrale de (E).

Exercice

Montrer que la fonction $f(t) = \frac{t^2}{2}e^t$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = t\,\mathrm{e}^t$.

Notion. Une fonction f est solution d'une équation différentielle si, lorsqu'on met f à la place de y dans le membre de gauche et qu'on fait le calcul, on obtient bien le membre de droite.

Résolution, étape 0

On veut résoudre

$$(E): \qquad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$$

Sur un intervalle I où α ne s'annule pas.

On divise tout par $\alpha(t) \Rightarrow$

$$y' + a(t)y = b(t)$$

L'équation a maintenant la bonne forme

Etape 1 : Equation homogène

Définition

L' équation homogène associée à (E) (ou *équation sans second membre*) est

$$(E_h): \qquad \forall t \in I, \quad y' + a(t)y = 0.$$

Remarque : homogène signifie second membre nul.

Propriété.

Les solutions de (E_h) : $y' + a(t)y = 0$ sont :

$$y_h(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)}$$

avec

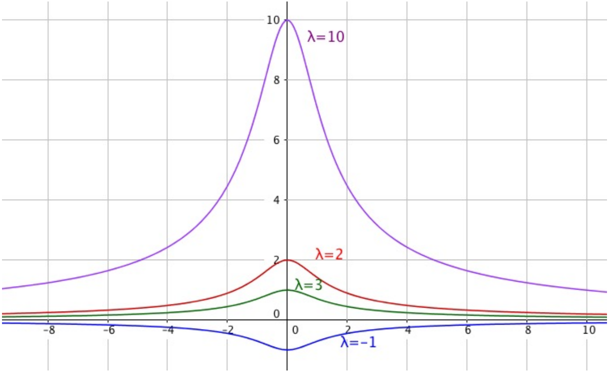
- λ une constante (infinité de possibilté)
- A une primitive de a sur I.

Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{t}{t^2+1}y = 0$.

Notion. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln u$ si u est une fonction positive.

Représentation graphiques de certaines solutions



Etape 2 : Solution particulière

On revient à l'équation avec second membre

$$(E) : \quad y' + a(t)y = b(t)$$

1. on "devine" la forme d'une solution particulière y_p (reconnaitre un cas du cours ou faire la variation de la constante)
2. on reporte dans l'équation (E) : $y_p' + a(t)y_p = b(t)$
3. On calcule et on déterminer complètement y_p

Cas faciles

(E) : $\quad y' + ay = b(t)$ avec a une constante
$\Rightarrow y_p$ solution particulière qui "ressemble" à $b(t)$

Si $b(t) = P(t)$ un polynôme alors $y_p(t) = R(t)$ un polynôme inconnu de même degré que P.

$$(E) : \quad y' + ay = b(t)$$

$\boxed{\text{Si } b(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{mt}\text{, avec } P \text{ un polynôme}}$

Alors

- $\boxed{y_P(t) = R(t)\,\mathrm{e}^{mt}}$ si $\boxed{m \neq -a}$

  (quand l'exponentielle du second membre n'est pas la même que celle de la solution homogène)

- $\boxed{y_P(t) = t \times R(t)\,\mathrm{e}^{mt}}$ si $\boxed{m = -a}$

  (quand l'exponentielle du second membre est la même que celle de la solution homogène !)

avec R un polynôme inconnu $\boxed{\text{de même degré}}$ que P.

Exemple : Déterminer une solution particulière y_p sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles

$$(E_1) : \; y' - 2y = (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad (E_2) : \; y' - 2y = t\,\mathrm{e}^{2t}$$

$$(E): \quad y' + ay = b(t)$$

Si $b(t) = P(t)\cos(mt)$ ou $b(t) = P(t)\sin(mt)$ avec P un polynôme

méthode réelle ou méthode complexe.

Méthode réelle

$$y_P(t) = q(t)\cos(mt) + s(t)\sin(mt)$$

avec q et s polynômes de degré inférieur ou égal à celui de P.

$$(E): \quad y' + ay = P(t)\cos(mt) \text{ ou } b(t) = P(t)\sin(mt)$$

Méthode complexe

$$y \to z, \quad \sin(mt) \to e^{imt}, \quad \cos(mt) \to e^{imt}$$

$\Rightarrow$ nouvelle équation complexe :

$$(E_{\mathbb{C}}): \; z' + az = P(t)e^{imt}$$

Solution particulière $\boxed{z_p(t) = R(t)e^{imt}}$ avec R polynôme complexe de même degré que P.

Puis on revient en réel :

- Si on avait $P(t)\cos(mt)$: $\boxed{y_p = \mathrm{Re}(z_P)}$
- Si on avait $P(t)\sin(mt)$: $\boxed{y_p = \mathrm{Im}(z_P)}$

Exercice

En utilisant la méthode complexe, déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E): \ y' - 2y = t\sin(t).$$

Notion.

1. On pose une équation complexe en remplaçant y par z et $\sin(mt)$ par e^{imt}.
2. On cherche z_p sous la forme $R \times e^{imt}$ avec R un polynôme inconnu de même degré que celui du second membre.
3. On met z_p sous forme algébrique et on dit $y_p = \operatorname{Im} m(z_p)$

Les autres cas : Méthode de variation de la constante

1. Solution de l'équation homogène $y_h = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)}$.
2. Solution particulière $\boxed{y_p(t) = \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}}$ avec $\lambda(t)$ une fonction inconnue.
3. On reporte y_p dans l'équation $(E) \Rightarrow \lambda'(t) \Rightarrow \lambda(t)$
4. Conclusion $y_p(t) = \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}$

Exemple : Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) : \; y' - ty = t\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$$

Principe de superposition

.

$$(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$$

1. y_{p1} solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$.
2. y_{p2} solution particulière de $y' + a(t)y = b_2(t)$.
3. $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

Etape 3 : Solution totale de l'équation

Propriété.

$$y = y_p + y_h$$

avec

- y_h toutes les solutions de l'équation homogène
- y_p une solution particulière

Etape 4 : Conditions initiales

Propriété.

- équation différentielle (E) : $y' + a(t)y = b(t)$
- condition de Cauchy $\boxed{y(t_0) = y_0}$

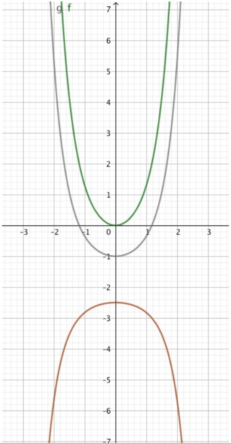
$\Rightarrow$ une solution y unique (une seule valeur de λ)

Par un point donné, il passe une courbe intégrale et une seule.

Exercice

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y' - ty = 2t$ avec la condition initiale $y(0) = -1$. On donne que l'ensemble des solutions est

$$y(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}} - 2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$



Et il en reste quoi ?

1. Quelles sont les solutions de $y' + ay = 0$?
2. Si le second membre d'une équation linéaire du premier ordre est $(4x^2 + 2)e^{3x}$, comment poser une solution particulière y_p ?
3. Et après avoir posé y_p, on fait quoi ?
4. On a $y_h = \lambda e^{-t^2+3t}$. Dans la méthode de variation de la constante, on pose la solution particulière $y_p =$?

Réponses

1. $y_h = Ke^{-A(t)}$ avec A primitive de a.
2. $y_p = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$
3. On reporte dans l'équation et on déterminer a, b, c.
4. $y_p = \lambda(t)e^{-t^2+3t}$ avec λ une fonction.