Calcul d'intégrales
(2)

Plan

Intégration par parties

Théorème.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On sait que

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Donc

$$\int_a^b \Big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$$

Utilisation

Calculer la primitive d'un produit de deux fonctions, en primitivant l'une et dérivant l'autre.

- éliminer dans un produit une fonction qui n'est pas simple à primitiver : ln, Arcsin, Arctan
- calculer des intégrales dépendant d'un paramètre par récurrence

la primitive du logarithme népérien

Calculer $\int_a^b f(x)dx$ avec une intégration par partie :

$$\text{Astuce } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1 \times f(x)dx.$$

Exemple : Calculer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Intégrale de $f(x) = P(x)\,e^{ax}$, $f(x) = P(x)\cos(ax)$ ou $f(x) = P(x)\sin(ax)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

Appliquer plusieurs fois la méthode d'intégration par parties en dérivant le polynôme, ce qui finit par le faire disparaitre.

Exercice

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t^2 + 3t)\,e^t \,. \end{array}$$

Corrigé :

$$F(x) = \int_0^x (t^2+3t)\,\mathrm{e}^t\,dt = [(t^2+3t)\,\mathrm{e}^t]_0^x - \int_0^x (2t+3)\,\mathrm{e}^t\,dt$$

$$= [(t^2+3t)\,\mathrm{e}^t]_0^x - [(2t+3)\,\mathrm{e}^t]_0^x + \int 2\,\mathrm{e}^t\,dt$$

$$= (x^2+3x)\,\mathrm{e}^x - (2x+3)\,\mathrm{e}^x + 3 + 2[\mathrm{e}^t]_0^x$$

$$= (x^2+3x)\,\mathrm{e}^x - (2x+3)\,\mathrm{e}^x + 3 + 2\,\mathrm{e}^x - 2$$

$$= (x^2+x-1)\,\mathrm{e}^x + 1$$

Exercice

Calculer

$$\int_0^{\pi} (x^2 + 2x - 3)\sin(2x)\mathrm{d}x$$

Corrigé :

$$\int_0^{\pi} (x^2 + 2x - 3)\sin(2x)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-(x^2 + 2x - 3)\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (x+1)\cos(2x)dx$$

$$= \frac{-(\pi^2 + 2\pi - 3)}{2} - \frac{3}{2} + \left[(x+1)\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2}dx$$

$$= \frac{-\pi^2 - 2\pi}{2} - \left[-\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{-\pi^2 - 2\pi}{2}$$

Plan

Théorème.

$y = \varphi(x)$ un changement de variable $\mathcal{C}^1$

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \,.\, \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Effectuer un changement de variable dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{avec} \qquad t = \varphi(x)$$

1. Les bornes de l'intégrale :

$$x = a \longrightarrow t = \varphi(a), \qquad x = b \longrightarrow t = \varphi(b)$$

2. le dx :

$$\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. la fonction :
   - faire apparaitre $\varphi'(x)$ pour le grouper avec dx.
   - Faire apparaitre partout ailleurs $\varphi(x)$ (pas de x "tout seul")
4. on remplace tout d'un seul coup.

Exercice

Calculer $\displaystyle\int_0^{5\pi/2} \cos(x)\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sin x$

On calcule les éléments suivants :

- Si $x = 0$, alors $t =$ ...... (borne inférieure)
- Si $x = 5\pi/2$, alors $t =$ ..... (borne supérieure)
- en "dérivant" $t = \sin x$, on trouve $dt = \cdots dx$. Faire apparaitre ce terme dans l'intégrale et l'encadrer.
- Dans le reste de l'intégrale, entourer toute les apparitions de l'expression $\sin x$.

Dans l'intégrale, remplacer les bornes, placer dt et t. Puis finir le calcul.

Effectuer un changement de variable dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{avec} \qquad x = \psi(t)$$

1. Les bornes : On cherche α tel que $\psi(\alpha) = a$ et β tel que $\psi(\beta) = b$.

$$a \longrightarrow \alpha, \qquad b \longrightarrow \beta$$

2. dx :

$$\mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

3. La fonction :

$$x \longrightarrow \psi(t)$$

4. On remplace tout d'un seul coup.

Exemple : Calculer $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ avec $x=\cos t$.

$$x=-1\longrightarrow t=\pi,\qquad x=1\longrightarrow t=0,\qquad dx=-\sin t dt$$

Donc

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t)dt$$

$$=\int_{\pi}^{0}\sqrt{\sin^2 t}(-\sin t)dt=-\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt=-\int_{\pi}^{0}\frac{1}{2}(1-\cos(2t))dt$$

$$=-\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x))\right]_{\pi}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

Primitives d'éléments simples

On veut primitiver

$$\frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

Se ramener à des primitives connues $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^k}$ et $\frac{1}{1+x^2}$.

En bref :

1. **Gérer le x au numérateur :** Obtenir $\frac{u'}{u}$ (primitive $\ln|u|$) et $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.
2. **Gérer le x au dénominateur :** Obtenir $\frac{1}{At^2+B}$.
3. **Dérivée d'une arctangente :** Obtenir $\frac{1}{y^2+1}$.

1) Gérer le x (sans puissance) au numérateur.

Faire apparaitre la dérivée du dénominateur

$$\frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \frac{\heartsuit(ax^2+bx+c)' + \heartsuit}{ax^2+bx+c}$$

Séparation

$$= \heartsuit \underbrace{\times \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}}_{\frac{u'}{u}} + \heartsuit \times \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$$= \spadesuit + \heartsuit \times \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Exemple : On veut calculer

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x \qquad \Delta = -4 < 0$$

La dérivée du dénominateur est $2x+2$:

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2(2x+2)-4}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{(2x+2)}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x - 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$

$$= 2\left[\ln(x^2+2x+2)\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$$

2) Gérer le x (sans puissance) au dénominateur :

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

$ax^2 + bx + c$ sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}.x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \spadesuit$$

Changement de variable $t = \sqrt{a}.x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$

$$\heartsuit \int_{\diamondsuit}^{\diamondsuit} \frac{1}{t^2 + \spadesuit} dt$$

Exemple : (suite)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} \qquad x^2+2x+2=(x+1)^2+1.$$

Changement de variable $u = x+1$.

$$du = dx, \qquad x = 0 \to u = 1, \qquad x = 1 \to u = 2$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$$
$$= [\arctan u]_1^2 = \mathrm{Arctan}(2) - \frac{\pi}{4}$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = 2\ln(5) - 2\ln(2) + \pi - 4\,\mathrm{Arctan}(2).$$

3) Faire apparaitre la dérivée d'une Arctangente

$$\int_a^b \frac{1}{At^2 + B} dt, \qquad A, B > 0$$

1. Factoriser B (faire apparaître le $+1$) :

$$\int_a^b \frac{1}{At^2 + B} dt = \int_a^b \frac{1}{B\left(\frac{A}{B}t^2 + 1\right)} dt$$

2. Rentrer tout dans le carré

$$= \frac{1}{B} \int_a^b \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{A}{B}}t\right)^2 + 1} dt$$

3. Changement de variable $y = \sqrt{\frac{A}{B}}t$ (le terme dans le carré) :

$$= \heartsuit \int_{\diamondsuit}^{\diamondsuit} \frac{1}{y^2 + 1} dy$$

Exercice

Primitiver

$$f(t) = \frac{1}{3t^2 + 2}$$

Corrigé.

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{3t^2+2}dt=\int_0^x \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}t^2+1\right)}dt=\int_0^x \frac{1}{2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t\right)^2+1\right)}dt$$

On pose $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t$

$$dy=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}dt,\qquad 0\to 0,\qquad x\to\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$$

Donc

$$F(x)=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x}\frac{1}{2\left(y^2+1\right)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dy=\left[\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\arctan y\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)$$

Quotients de polynômes trigonométriques

$$f(x) = \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}$$

avec P et Q polynômes

Changement de variable

$$u = \cos(x), \quad \text{ou} \quad u = \sin(x), \quad \text{ou} \quad u = \tan(x)$$

Si ça ne marche pas, essayer

$$u = \cos(2x), \quad \text{ou} \quad u = \tan\frac{x}{2}$$

Exercice

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{2+\cos^2(x)}\,dx$ en posant $u = \cos(x)$.

Corrigé. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{2+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

$$\frac{2\cos(x)\sin(x)}{2+\cos^2(x)} = \frac{-2\cos(x)}{2+\cos^2(x)}\sin x$$

On pose $u = \cos(x)$

$$du = \sin x dx, \quad 0 \to 1, \quad \pi/2 \to 0$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{2+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{-2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \Big[\ln(2+u^2)\Big]_0^1 = \ln(3) - \ln(2).$$

Et il en reste quoi ?

1. Donner la formule d'intégration par partie.
2. Dans le calcul de $\int (x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7)e^{3x} dx$ par une intégration par partie, quelle fonction dériver et quelle fonction primitiver ? Combien de fois doit-on faire une IPP ?
3. Pour faire le changement de variable $t = x^2$, que faut-il faire avant de faire quoique ce soit dans l'intégrale.
4. Comme calculer $\int \frac{1}{t^2+b}$ avec $b > 0$? (juste la méthode)

Réponses

1. $\int uv' = [uv] - \int u'v$
2. On dérive $(x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7)$ et on primitive e^{3x}. 4 fois de suite !
3. On dérive $dt = 2xdx$ et on calcule les nouvelles bornes.
4. On factorise par b pour avoir $+1$ et on un forme un carré avec le terme en x. Ensuite on fait un changement de variable pour avoir la dérivée d'une arctangente.