Calcul d'intégrales
(1)

Plan

$$F \text{ primitive de } f \Leftrightarrow F' = f.$$

Théorème.

f une fonction continue sur I intervalle

- f possède toujours une primitive F sur I.
- Toutes les primitives de f sont les fonctions $F + C$ avec C constante .
- Soit $a \in I$ et $k \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(a) = k$.

Exemples :

1. Les primitives de $f : x \mapsto x^3 + 2x + 3$ sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x + C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

2. ln est l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Définition

f continue sur un intervalle I, $a, b \in I$.

l'intégrale de f entre a et b est

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

avec F une primitive de f.

Remarque :

- Une intégrale est un nombre.
- Si $F_2 = F + C$ est une autre primitive de f on a

$$F_2(b) - F_2(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

- on peut remplacer x par une autre lettre
- Ne pas oublier dx à la fin
- $\int_a^b$ ....dx : x va de la valeur a à la valeur b.

Propriété. relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété. Linéarité

$\lambda \in \mathbb{R}$ une constante

$$\int_a^b \Big(\lambda f(x) + g(x)\Big)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème.

l'unique primitive de f qui s'annule en a est

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice

(TD) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

Exploiter les symétries et/ou la périodicité

- Si f est paire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

- Si f est impaire, alors

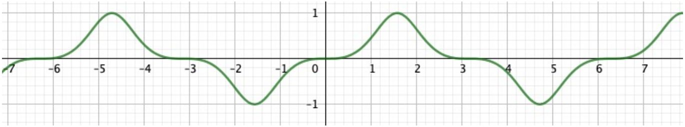
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0$$

- Si f est T-périodique, alors

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt, \quad \int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt,$$

Exemple :

$$f(x) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$$



$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)} dx \quad (\text{période } 2\pi)$$

$$= 0 \qquad (f \text{ impaire })$$

Plan

Primitives usuelles

La façon la plus simple de trouver une primitive de f est de reconnaître la dérivée d'une fonction usuelle.

$$x^k \quad (k \neq -1) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\frac{1}{x^k} \quad (k \neq 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-k}\frac{1}{x^{k-1}}$$

$$\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|x|$$

$$e^x \quad \Rightarrow \quad e^x$$

$$\cos x \quad \Rightarrow \quad \sin x,$$

$$\sin x \quad \Rightarrow \quad -\cos x$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} \text{ ou } 1 + \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad \tan x$$

$$\tan x \quad \Rightarrow \quad -\ln|\cos x|$$

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Arctan} x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \arcsin x$$

Reconnaître la dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété.

u et g fonctions

$$u' \times g(u) \underset{primitive}{\longrightarrow} G(u)$$

avec G une primitive de g

Application

Fonction	Primitive
$u'(u)^k \quad (k \neq -1)$	$\frac{(u)^{k+1}}{k+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{u'}{u^k} \quad (k \neq 1)$	$\frac{1}{(1-k)u^{k-1}}$
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$

Fonction	Primitive
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}(u)$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(u)$
$u' g(u)$	$G(u)$

Exemples :

Exercice

(TD) Calculer une primitive de

$$h : x \to \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Notion. $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$, $\frac{u'}{u^k}$ a pour primitive $\frac{1}{(1-k)u^{k-1}}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$.

Plan

Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

Si f produit et/ou puissance de cosinus/sinus $\longrightarrow$ linéariser f

Exercice

Linéariser $\sin^2(x)\cos^2(x)$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Notions. Formule d'Euler $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et on développe les puissances ET les produits. Quand on a bien trié le développement, on utilise les formule d'Euler à l'envers pour retrouver des sinus et cosinus.

Cas des fractions rationnelles simples

f fraction rationnelle $\longrightarrow$ décomposition en éléments simples

fonction	primitive
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$
$\frac{1}{(ax+b)^k} \quad (k \neq 1)$	$\frac{1}{a(1-k)}\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
$\frac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c}$	c.f changement de variable

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

$$X^3 = (X^2 - 2X + 4)(X+2) - 8 \qquad \text{(division euclidienne)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+2} dx = \int_0^1 x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|\right]_0^1$$

$$= \frac{10}{3} - 8\ln 3 + 8\ln 2$$

Exercice

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \to \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Notion. Une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan x$.

Exercice

Décomposer $\dfrac{1}{x^2-1}$ en éléments simples et calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Notions.

1. On cherche les racines du dénominateur pour le factoriser sous la forme $(x-r_1)(x-r_2)\ldots$.
2. On sait ensuite que la décomposition en élément simple sera $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-r_1} + \frac{b}{x-r_2} + \ldots$
3. on multiplie par $(x-r_1)$ et on pose $x=r_1$ pour trouver a. On fait de même pour b.
4. Une primitive de $\frac{1}{x-r_1}$ est $\ln|x-r_1|$.

Et il en reste quoi ?

1. Quelle est la primitive de f qui s'annule en 1 ?
2. Quelle est la primitive de $u'e^u$ avec u une fonction ?
3. Quelle est la méthode pour calculer la primitive de $(\sin x)^{10}$? (ne pas faire le calcul)
4. Quelle est la primitive de $\frac{u'}{u}$?

Réponses

1. $F(x) = \int_1^t f(t)dt$.
2. e^u
3. Linéarisation par les formules d'Euler.
4. $\ln|u|$.