Vecteurs de $\mathbb{R}^n$
(2)

Plan

1. Sous-espace vectoriels dans $\mathbb{R}^n$
2. Base d'un sous-espace vectoriel

Définition

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est **un sous-espace vectoriel** (s.e.v) si :

1. le **vecteur nul** appartient à F

$$\vec{0} \in F$$

2. F est stable par addition et par multiplication par un scalaire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall X, Y \in F, \quad \lambda X + Y \in F$$

Exemples :

1. $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel. Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriel.

Exercice

(TD) On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère l'ensemble

$$F = \{(x, 0, 0), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

1. Donner deux exemples de vecteurs de F.
2. Soient $X = (x, 0, 0)$ et $Y = (y, 0, 0)$ deux vecteurs de F, et λ un réel. Calculer $X + \lambda Y$. Est-ce que ce vecteur est dans F ?
3. Que vient-on de démontrer pour F ?

Propriété.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall(V_1, \ldots, V_n) \in F^n,$$

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n \in F.$$

sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition

Soit $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Le **sous-espace vectoriel engendré par** $\mathcal{F}$ est :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_m X_m, \quad \text{avec } \lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}$$

$\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans $\mathcal{F}$.

Exemples :

1. Si $\mathcal{F} = \{X\}$ (un seul vecteur) alors

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

C'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à X = une droite vectorielle.

2. Dans $\mathbb{R}^2$,

$$\text{Vect}(\{(2,3),(-1,2),(5,4)\})$$

est formé des vecteurs

$$X = a\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-b+5c\\3a+2b+4c\end{pmatrix}$$

3. Si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, donner les vecteurs de $F = \mathrm{Vect}\{(0,1,9),(2,3,4)\}$.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs

$$F = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$$

- $\mathcal{F}$ **engendre** F
- $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice de** F.

Exemple :

1. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, comme $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^n$.
2. La droite vectorielle $\{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est engendrée par le vecteur X.

Sous-espace vectoriel défini par des équations

Propriété.

Soit $A \in \mathcal{M}(n, p)$ et (S) le système $AX = \vec{0}$

L'ensemble des solutions de (S) :

$$\left\{X \in \mathbb{R}^p, \quad AX = \vec{0}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Exemple : $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{\begin{array}{ccc} 2x & +4y & = 0 \\ 3x & -5y & = 0 \end{array}\right.\right\}$ est un sous espace vectoriel avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Notons S l'ensemble des solutions du système $(S) : AX = \vec{0}$

- $A\vec{0} = \vec{0}$ donc $\vec{0} \in S$.
- Soient $X, Y \in S$ (des solutions du systèmes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On étudie $\lambda X + Y$:

$$A(\lambda X + Y) = A(\lambda X) + AY = \lambda \underbrace{(AX)}_{=\vec{0}} + \underbrace{AY}_{=\vec{0}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

  $\lambda X + Y$ est une solution du système : $\lambda X + Y \in S$.

Donc S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Définition

Soit A une matrice ligne de taille $(1, p)$ et $AX = \vec{0}$ l'équation associée.

L'ensemble des solutions de l'équation $AX = \vec{0}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ appelé **hyperplan**.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $ax + by = 0$. C'est donc une droite passant par O.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, un hyperplan est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $ax + by + cz = 0$. C'est donc un plan passant par O.

Exercice

(TD) Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^2$ définis par un système linéaire d'équations homogènes ? Donner la matrice du système dans ce cas.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x^2\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x = y\}$

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bien des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par un système linéaire d'équations homogènes ? Donner la matrice du système dans ce cas.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x + 1\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } y = 3x + z\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x - y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$

Question bonus : prouvez que les ensembles qui ne sont pas définis par un système d'équations linéaires ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

Famille génératrice et système d'équations

Un sous-espace vectoriel peut être défini à partir d'une famille génératrice ou d'un système d'équations, et il existe des méthode pour aller de l'un à l'autre.

attention à **l'ordre** des inconnues dans le système ! Il ne doit jamais changer en cours de route !

Technique : On a $F = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \vec{0}\}$. On veut écrire F à l'aide d'une famille génératrice $\to$ Méthode du pivot partiel de Gauss sur $AX = \vec{0}$. Comme le second membre ne contient que 0, il ne peut pas y avoir d'équation auxiliaire $0 = b$.

- Si il y a une unique solution, cette solution est le vecteur nul et $F = \{\vec{0}\}$.
- Si y a des variables auxiliaires $\to$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \heartsuit + \lambda_2 \spadesuit + \cdots \\ \lambda_1 \heartsuit + \lambda_2 \spadesuit + \cdots \\ \dots \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \\ \dots \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \spadesuit \\ \spadesuit \\ \dots \end{pmatrix} + \cdots$$

Donc F est engendré par ces vecteurs et :

$$F = Vect \left\{ \begin{pmatrix} \heartsuit \\ \heartsuit \\ \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \spadesuit \\ \spadesuit \\ \dots \end{pmatrix}, \cdots \right\}$$

Exemple : Les solutions S d'un système à trois inconnues sont :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$S = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice

Soit F le sous-espace vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rrcl} 2x & +y & = & 0 \\ 26x & +13y & = & 0 \end{array}\right.$$

Donner une famille génératrice de F, c'est-à-dire écrire $F = \operatorname{Vect} \cdots$.

Technique : Soit $F = \text{Vect}(V_1, V_2, \dots)$ On veut l'écrire à l'aide d'un système d'équations.

Soit $X(x_1, x_2, \dots) \in F$ alors

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

On fait un système où les λ_i sont les **inconnues** et les x_i les seconds membres.
Méthode du pivot de Gauss partiel : on cherche les **équations auxiliaires**.

X est dans F si et seulement si les équations auxiliaires sont vérifiées.

Donc F est définie par le système des équations auxiliaires.

Exercice

On considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{(1,2,0),(-1,0,1)\}$. Déterminer le système d'équation qui caractérise F.

Aide. Un vecteur $X = (x, y, z)$ est dans F si et seulement si il existe a, b réels tels que $X = a(1,2,0) + b(-1,0,1)$. Quel système obtient-on ? Quelles sont les inconnues ? Et qu'est-ce qu'on cherche à faire ?

Et il en reste quoi ?

1. Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $u, v \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda u + v \in F$ est .....(?)....
2. Quels sont les deux types de sous-espace vectoriels qu'on a vu ?

Réponses

1. Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $u, v \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda u + v \in F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Les sous-espace vectoriels engendrés par une famille et les sous-espace vectoriels solutions d'un système linéaire homogène.

Plan

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{F} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ est une **base** de F ssi

1. $\mathcal{F}$ engendre F : $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ (famille génératrice)
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Exemple : Soit X un vecteur non nul et $F = \mathrm{Vect}(X)$.
Alors (X) est une base de F, puisqu'elle est génératrice et libre.

Propriété.

$\mathcal{F} = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ est une base de F

$$\Leftrightarrow$$

$\forall X \in F$, il existe λ_1, λ_2, ... uniques tels que :

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_r X_r$$

Existence de base et dimension

Théorème.

Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ possède une base $\mathcal{B}$.

Définition

Soit un sous-espace vectoriel F.
Toutes ses bases ont le même nombre d'éléments, qu'on appelle $dim(F)$ la **dimension** de F .

Exemples :

1. le sous-espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ a, par convention, une base vide. Donc sa dimension est
$$dim(\{\vec{0}\}) = 0$$
C'est le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.
2. $\mathbb{R}^n$ a la base canonique qui contient n éléments, donc
$$dim(\mathbb{R}^n) = n$$
3. Soit X un vecteur non nul et $F = \text{Vect}(X)$. (X) étant une base de F, on a
$$dim(F) = 1$$

Exercice

(TD) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 1, -3)$. Quelle est la dimension de F ? En donner une base.

Notions.

- On appelle base de F toute famille de vecteurs $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}$ engendre F et $\mathcal{F}$ est une famille libre.
- Le nombre d'élément d'une base de F est appelé la dimension de F ;

Propriété.

F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$$0 \leqslant dim(F) \leqslant n$$

De plus :

- Si $dim(F) = 0$, alors $F = \{\vec{0}\}$.
- Si $dim(F) = n$, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Propriété.

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad \dim(E) \leqslant \dim(F)$$

$$E \subset F \text{ et } dim(E) = \dim(F) \quad \Rightarrow \quad E = F$$

Propriété.

F sous-espace vectoriel dimension $dim(F)$:

- Une famille libre de F contient au maximum $dim(F)$ vecteurs.
- Si une famille libre de F contient exactement $dim(F)$ vecteurs, alors c'est une base de F.
- Une famille génératrice de F contient au minimum $dim(F)$ vecteurs.
- Si une famille génératrice de F contient exactement $dim(F)$ vecteurs, alors c'est une base de F.

Remarque : libre $\leqslant$ base $\leqslant$ génératrice.

Théorème.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- Toute famille $\mathcal{F}$ génératrice de F contient une base.
- De plus, si $\mathcal{F}$ est génératrice de F et si $\mathcal{G}$ est une famille libre de F, alors on peut compléter $\mathcal{G}$ avec des vecteurs de $\mathcal{F}$ pour former une base de F
- **(Théorème de la base incomplète)** Toute famille libre de F peut être complétée en une base.

Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété.

F et G deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

Leur intersection

$$F \cap G = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, v \in F \text{ et } v \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$,

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0\right\}, \quad G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x-y+3z = 0\right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels.

$$F \cap G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\right\}$$

est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : la réunion de deux sous-espaces vectoriels : NON !

Exercice

(TD) Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - z = 0$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $u = (2, 0, 1)$. Montrer que $D \cap P = \{(0, 0, 0)\}$.

Notions. Il faut utiliser la double inclusion en montrant que

- $(0, 0, 0)$ appartient à $D \cap P$, c'est à dire appartient à D et appartient à P
- Tout élément $X \in D \cap P$ vérifie $X = (0, 0, 0)$.

$X \in D \cap P$ signifie que $X \in D$ (donc.... ?) et que $X \in P$ (donc... ?)

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition

F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

La somme de F et G est

$$F + G = \{u + v,\ u \in F,\ v \in G\}$$

- C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
- C'est l'ensemble des vecteurs qui peuvent se décomposer en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition

F et G de $\mathbb{R}^n$ sont **supplémentaires** et on note $\mathbb{R}^n = F \oplus G$

$$\Leftrightarrow$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut se décomposer de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème.

F et G sont supplémentaires

$$\Leftrightarrow \qquad F + G = \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad F \cap G = \{\vec{0}\}.$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $F = \text{Vect}\{(-1, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(2, 2)\}$. Montrer que ces espaces sont supplémentaires et écrire la décomposition d'un vecteur $X(x, y)$ sur $F \oplus G$.

Et il en reste quoi ?

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et il a pour base la famille (u, v, w, t). Quelle est sa dimension ?
2. Si F et G sont deux sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$, que peut-on dire sur

$$F \cap G, \quad F \cup G, \quad F + G?$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, avec unicité de la décomposition, on peut alors dire que F et G sont ...... (?).....

Réponses

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et il a pour base la famille (u, v, w, t), alors Dimension (F) $=$4
2. Si F et G sont deux sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels, mais $F \cup G$ n'est rien de spécial.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, avec unicité de la décomposition, on peut alors dire que F et G sont supplémentaires.