# Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

(1)

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \text{avec } x_1, x_2, \cdots \in \mathbb{R} \right\}$$

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un **vecteur**.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur nul :

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Opérations possibles.

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

On dit que $\mathbb{R}^n$ est un **Espace vectoriel**.

# Plan

**Définition**

$\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$X$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs de $\mathcal{F}$ ssi

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_p U_p$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

# Familles libres

**Définition**

La famille de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ est **libre** $\Leftrightarrow$

$$\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$$

- Aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres
- Les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

la famille $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ est **liée** $\Leftrightarrow$

$$\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \text{ pas tous nuls}$$

Un vecteur de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

**Exemples :**

1. Une famille qui contient le vecteur nul $\vec{0}$ est liée :

$$1.\vec{0} + 0.X_1 + \cdots + 0.X_n = 0$$

   les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls.

2. Une famille qui contient deux vecteurs colinéaires est liée.

**Technique :** On veut étudier si la famille $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est **libre** ou **liée**.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

On cherche les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$ (solution unique), alors la famille est **libre**.
- Si on trouve une (ou des) solution avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, alors la famille est **liée**.

**Exemple :**

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (1,2,1), \quad u_3 = (0,1,1)$$

On étudie si la famille $(u_1, u_2, u_3)$ est libre.

On cherche $a, b, c$ tels que

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{llll} a & +b & & =0\\ a & +2b & +c & =0\\ & +b & +c & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour $\lambda = 1,\ a = 1,\ b = -1,\ c = 1$. Donc la famille est liée.

**Exercice**

La famille $(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (3, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (7, 4, 0)$ est-elle libre ou liée ?

**Notion.** On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_p U_p = \vec{0}$$

Si tout les $\lambda$ sont nuls, alors la famille est libre. Sinon, elle est liée.

# Familles génératrices

**Définition**

$(U_1, U_2, \dots, U_p)$ est **génératrice de** $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire des $U_i$.

$\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p$ :

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_p U_p$$

**Technique :** On étudie si $(U_1, \ldots, U_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On cherche $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = X$$

- Si on peut trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sans aucune condition sur $X$ (pas d'équation auxiliaire), alors $(U_1, \ldots, U_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Si il y a des conditions sur $X$ pour trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (les équations auxiliaires), alors $(U_1, \ldots, U_p)$ n'est PAS génératrice de $\mathbb{R}^n$.

**Exemple :** La famille

$$(v_1, v_2, v_3) = \Big((1,2,1),(3,1,2),(3,-4,1)\Big)$$

est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ?

Soit $X(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. on cherche $a, b, c$ tel que $av_1 + bv_2 + cv_3 = X$ :

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a & +3b & +3c & = x \\ 2a & +b & -4c & = y \\ a & +2b & +c & = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a & +3b & +3c & = x \\ & & 0 & = y - 5z + 3x \\ & -b & -2c & = z - x \end{array}\right.$$

$a, b, c$ existent $\Leftrightarrow$ $X$ vérifie la condition $0 = y - 5z + 3x$.
Donc la famille $v$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ (mais d'un sous-espace vectoriel...)

### Exercice

La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4) = \big((1,0,1),(0,1,1),(-1,0,1),(0,2,1)\big)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$ ?

**Notion.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_p U_p = X$.

- Si on peut trouver au moins une solution $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sans aucune condition sur $X$ (pas d'équation auxiliaire), alors la famille $(U_1, \dots, U_p)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Si il y a des conditions sur $X$ pour trouver des solutions $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (les équations auxiliaires), alors la famille $(U_1, \dots, U_p)$ n'est PAS génératrice de $\mathbb{R}^n$.

# Bases de vecteurs

**Définition**

Une famille $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est **une base de** $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ la famille est libre et génératrice

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^n$ :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

la famille $(E_1, E_2, \ldots E_n)$ est la base *canonique* de $\mathbb{R}^n$.

**Corollaire.**

1. Une famille génératrice de $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base.
2. Une famille libre à $n$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est une base.

**Remarque :** Les familles de $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas toutes des bases, attention !

**Théorème.**

$\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$

$\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\exists! \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ :

$$X = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \cdots + \lambda_n U_n$$

Les **coordonnées** de $X$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $X = (x, y, z)$ a pour coordonnées $(x, y, z)$ dans la base canonique $(E_1(1,0,0), E_2(0,1,0), E_3(0,0,1))$ car

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Les quatre stratégies pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base :

1. On montre que $\mathcal{F}$ est libre. On montre que $\mathcal{F}$ est génératrice. Donc c'est une base.
2. On montre que $\mathcal{F}$ est génératrice. On montre que $\mathcal{F}$ est libre en posant $X = \vec{0}$ dans le calcul de génératrice. Donc c'est une base.
3. On compte qu'il y a $n$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. On montre que $\mathcal{F}$ est génératrice. Donc c'est une base.
4. On compte qu'il y a $n$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. On montre que $\mathcal{F}$ est libre. Donc c'est une base.

**Exercice**

La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((2,1,0),(0,3,1),(1,1,1))$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$ ? Le cas échéant, donner les coordonnées du vecteur $(2,4,1) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.

# Matrices de passage

**Définition**

Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_p)$ une famille de vecteurs.

La **matrice de la famille** $\mathcal{B}$ est formée en mettant côte à côte, en colonne, les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

**Définition**

$\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ la base canonique.

$P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ la **matrice de passage** de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ :

- est formée en mettant en mettant côte à côte, en colonne, les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ exprimés avec leurs coordonnées canoniques.
- est une matrice carrée et inversible.

**Exemple :** La base *canonique* $\mathcal{C}(E_1, E_2, \dots E_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

a pour matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}$ :

$$P(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique $\mathcal{C} = (E_1(1,0), E_2(0,1))$ et la famille

$$\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1)) = \left( U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right)$$

Les vecteurs $U$ et $V$ sont indépendants et la famille contient 2 vecteurs, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est

$$P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice

(TD) Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big)$$

Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

**Notion** Soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2, \ldots, U_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est notée $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et elle est formée en mettant côte à côte, en colonne, les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.

# Utilisation des matrices de passage

- $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_n)$ une autre base de $\mathbb{R}^n$, avec $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$

$X$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

- $X = (x_1, \cdots, x_n)$ en base canonique $\mathcal{C}$
- $(x'_1, \dots, x'_n)$ les coordonnées de $X$ dans la base $\mathcal{B}$ :

$$X = x'_1 U_1 + \cdots + x'_n U_n$$

On pose les coordonnées en colonne, en précisant par un indice $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$ dans quelle base on est :

$$X_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \qquad X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

**Propriété.**

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}X_{\mathcal{C}}$$

**Remarque :** Pour trouver les coordonnées d'un vecteur $X$ dans une base $\mathcal{B}$,on multiplie $X$ par **l'inverse** de la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

**Exemple :** soit la base $\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1))$ :

$$P(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Soit $X$ de coordonnées $(x, y)$ dans $\mathcal{C}$ et de coordonnées $(a, b)$ dans $\mathcal{B}$.

- Les coordonnées de $X$ dans la base canonique sont :

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Les coordonnées de $X$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}X_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc $X = \frac{x+y}{2}U + \frac{y-x}{2}V$.

## Exercice

(TD) Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_1$ la famille de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\big)$. On a

$$P(\mathcal{C},\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(\mathcal{C},\mathcal{B}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $X$ vecteur de coordonnées canoniques $(1,-3,2)$. Donner les coordonnées de $X$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

**Notion.**

$$X_{\mathcal{C}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}} = \left(P(\mathcal{C},\mathcal{B})\right)^{-1} X_{\mathcal{C}}$$

Comment passer d'une base quelconque à une autre base quelconque ?

**Définition**

Soient deux bases de $\mathbb{R}^n$ :

- $\mathcal{B}$ de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$
- $\mathcal{B}'$ de matrice de passage $P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$.

La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})^{-1} P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$$

.

**Démonstration.** Soit un vecteur $X$ ( implicitement en base canonique). Notons $X_{\mathcal{B}}$ le vecteurs des coordonnées de $X$ dans la base $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{B}'}$ le vecteurs des coordonnées de $X$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$(1)X = P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}}, \quad (2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}X,$$

$$(3)X = P(\mathcal{C},\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'}, \quad (4)X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C},\mathcal{B}')^{-1}X$$

On reporte (3) dans (2) et (1) dans (4) :

$$(2)X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'},$$

$$(4)X_{\mathcal{B}'} = P(\mathcal{C},\mathcal{B}')^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B})X_{\mathcal{B}} = (P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B}'))^{-1}X_{\mathcal{B}}$$

On a donc des formules directes pour aller de $X_{\mathcal{B}}$ à $X_{\mathcal{B}'}$ et inversement, en utilisant $P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1}P(\mathcal{C},\mathcal{B}')$.

**Propriété.**

$$X_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{B}, \underbrace{\mathcal{B}')X_{\mathcal{B}'},}_{} \qquad \text{et} \qquad X_{\mathcal{B}'} = (P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} X_{\mathcal{B}}$$

**Propriété.**

1. $$P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$$
2. $$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$
3. $$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = P(\mathcal{B}, \mathcal{C})P(\mathcal{C}, \mathcal{B}')$$
4. Les colonnes de la matrice $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ sont formées avec les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

**Exemple :** $\mathcal{C}$ la base canonique et $\mathcal{B} = (U(1,1), V(-1,1))$

$$P(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(\mathcal{C},\mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$ :

- $E_1(1,0)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- $E_2(0,1)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

# Effet des changements de base sur les systèmes

- $AX = B$ système d'équationsz linéaires ($n$ lignes, $n$ inconnues, $A$ carrée)
- $X$ est en base canonique $X = X_{\mathcal{C}}$
- $\mathcal{B}$ une autre base avec $P = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})$

On sait que

$$X = P(\mathcal{C}, \mathcal{B})X_{\mathcal{B}} = PX_{\mathcal{B}}, \qquad B = PB_{\mathcal{B}}$$

On reporte dans le système

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad APX_{\mathcal{B}} = PB_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{P^{-1}AP}_{A'}X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}} \quad \Leftrightarrow \quad A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$$

On a transformé $AX = B$ en un système $A'X_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{B}}$ avec $A' = P^{-1}AP$

# Et il en reste quoi ?

1. Si $(u, v, w)$ est une famille de vecteur, résoudre $au + bv + cw = \vec{0}$ permet de montrer que la famille est libre ? génératrice ? ou une base ?
2. C'est quoi une base ?
3. On a $u(1, 3)$ et $v(-1, 5)$ et $(u, v)$ base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique à $(u, v)$ est laquelle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

# Réponses

1. Si $(u, v, w)$ est une famille de vecteur, résoudre $au + bv + cw = \vec{0}$ permet de montrer que la famille est libre
2. une base est une famille de vecteurs libres et génératrice.
3. On a $u(1, 3)$ et $v(-1, 5)$. La matrice de passage de la base canonique à $(u, v)$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$