Plan

Définition

Une fraction rationnelle (fonction rationnelle) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est

$$F = \frac{A}{B}$$

avec A et $B \neq 0$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

Exemple : $F(X) = \dfrac{X^2 + 3X + 1}{2X - 6}$ est une fraction rationnelle, c'est un élément de $\mathbb{R}(X)$.

Définition

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

F est irréductible si A et B n'ont pas d'autres diviseurs communs que les polynômes constants non nuls.

Exemple : $F(X) = \dfrac{X^2 + X}{X^2}$ n'est pas irréductible car X divise à la fois le numérateur et le dénominateur.
$G(X) = \dfrac{X + 1}{X}$ est irréductible.

Désormais,
on considère que les fractions rationnelles écrites sont irréductibles.

Définition

$F = \frac{A}{B}$ irréductible.

- Les racines de A sont les racines (ou les zéros) de F.
- Les racines de B sont les pôles de F.
- Si F n'est pas nulle, le degré de F est

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$$

Exemple :

$$F(X) = \frac{X^2 + X - 2}{(X+1)^2(X-3)}$$

Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

Etape 1 : Partie entière et partie polaire/fractionnaire. On fait la division euclidienne de A par B

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X), \qquad \deg(R) < \deg(B)$$

On divise de chaque coté de l'égalité par B et on a :

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = \frac{B(X)Q(X) + R(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

- Q est la **partie entière** de F
- $\dfrac{R}{B}$ la **partie polaire (ou fractionnaire)** de F.

Exemple : Déterminer les parties entières et polaires de

$$F(X) = \frac{4X^4 - 3X^2 + 2X - 1}{X^2 - 1}$$

La division euclidienne donne

$$4X^4 - 3X^2 + 2X - 1 = (X^2 - 1)(4X^2 + 1) + 2X$$

donc

$$F(X) = \frac{(X^2 - 1)(4X^2 + 1) + 2X}{X^2 - 1} = (4X^2 + 1) + \frac{2X}{X^2 - 1}$$

Exercice

(TD) Déterminer la partie entière et la partie fractionnaire de

$$\frac{X^3+1}{X^2+X}$$

Notion. On fait la division euclidienne du numérateur A par le dénominateur B, on obtient une égalité de la forme $A = QB + R$. On divise de chaque coté de l'égalité par B et on fait UNE simplification.

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$B(X) = C(X-a)^m(X-b)^n \dots$$

avec $a, b, \dots$ les racines de B et leurs multiplicités $m, n \dots,$, C le coefficient dominant.

Donc

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{C(X-a)^m(X-b)^n \dots}.$$

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

  $$B(X) = C(X-a)^m \dots (X-b)^n \dots (X^2+b_1X+c_1)^p(X^2+b_pX+c_p)^q \dots$$

  avec $a, b, \dots$ sont les racines réelles de B de multiplicités $m, n \dots$, C le coefficient dominant, et $(X^2 + b_iX + c_i)$ à discriminant strictement négatifs.

  Donc

  $$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{C(X-a)^m \dots (X-b)^n \dots (X^2+b_1X+c_1)^p(X^2+b_pX+c_p)^q \dots}.$$

Exemple :

$$F(X) = \frac{4X^4 - 3X^2 + 2X - 1}{X^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad F(X) = (4X^2 + 1) + \frac{2X}{X^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad F(X) = (4X^2 + 1) + \frac{2X}{(X-1)(X+1)}$$

Exercice

(TD) On a obtenu

$$\frac{X^3 + 1}{X^2 + X} = (X - 1) + \frac{X + 1}{X^2 + X}$$

Décomposer le dénominateur sous forme d'un produit de facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Que remarque-t-on ?

Etape 3 : Décomposition de la partie fractionnaire en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Définition

Un élément simple de $\mathbb{C}(X)$ est

$$\frac{\lambda}{(aX+b)^{\alpha}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Exemples :

Théorème.

$F = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ avec

$$B(X) = C(X-a)^m(X-b)^n \dots (X-g)^p$$

la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ est

$$F(X) = Q(X) + \frac{\heartsuit}{X-a} + \frac{\heartsuit}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\heartsuit}{(X-a)^m}$$

$$+ \frac{\heartsuit}{X-b} + \frac{\heartsuit}{(X-b)^2} + \cdots + \frac{\heartsuit}{(X-b)^n}$$

$$+ \cdots + \frac{\heartsuit}{X-g} + \frac{\heartsuit}{(X-g)^2} + \cdots + \frac{\heartsuit}{(X-g)^p}$$

Remarque : Les techniques pour trouver les $\heartsuit$ seront vues à la fin.

Exemple : On a $F(X) = (4X^2+1) + \frac{2X}{(X-1)(X+1)}$, donc la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ est

$$F(X) = (4X^2+1) + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

Exercice

Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ de $F(X) = 1 + \frac{X^3+X-1}{(X-1)(X^3-1)}$.

Notion. Pour chaque racine a de multiplicité m, il faut ajouter un ensemble de terme

$$\frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(X-a)^m}$$

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Définition

On appelle élément simple de $\mathbb{R}(X)$ toute fraction rationnelle de l'une des formes suivantes :

- $\dfrac{\alpha}{(aX+b)^m}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^\star, b \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{\lambda X + \mu}{(aX^2+bX+c)^p}$ où le discriminant du dénominateur $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, et $(\lambda, \mu, c, d) \in \mathbb{R}^4, a \in \mathbb{R}^\star$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

Exemples :

Exercice

(TD) Parmi les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{2X-2}{X-1}, \qquad \frac{2X-1}{(X-1)^3}, \qquad \frac{2}{(X^2+1)^2}, \qquad \frac{2X+1}{X^2-4X+3},$$

quelles sont celles qui sont des éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$?

Notions. les éléments simples sont

- $\dfrac{\alpha}{(aX+b)^m}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^\star, b \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^p}$ où le discriminant du dénominateur $\Delta = b^2-4ac < 0$, et $(\lambda,\mu,c,d) \in \mathbb{R}^4, a \in \mathbb{R}^\star$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.

Soit $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$ avec

$$B(X) = C(X-a)^m(X-b)^n \dots (X^2+cX+d)^p(X^2+eX+f)^q \dots$$

Théorème.

La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\begin{aligned}F(X) = Q(X) &+ \frac{\heartsuit}{X-a} + \dots + \frac{\heartsuit}{(X-a)^m} \\ &+ \frac{\heartsuit}{X-b} + \dots + \frac{\heartsuit}{(X-b)^n} + \dots \\ &+ \frac{\heartsuit X + \heartsuit}{X^2+cX+d} + \dots + \frac{\heartsuit X + \heartsuit}{(X^2+cX+d)^p} \\ &+ \frac{\heartsuit X + \heartsuit}{X^2+eX+f} + \dots + \frac{\heartsuit X + \heartsuit}{(X^2+eX+f)^q} + \dots\end{aligned}$$

Selon ce que contient B, on fait une SOMME d'éléments simples des types suivants.

facteur de B	Elements simples
$(aX+b)$	$\dfrac{\heartsuit}{aX+b}$
$(aX+b)^2$	$\dfrac{\heartsuit}{aX+b}+\dfrac{\heartsuit}{(aX+b)^2}$
$(aX+b)^3$	$\dfrac{\heartsuit}{aX+b}+\dfrac{\heartsuit}{(aX+b)^2}+\dfrac{\lambda_3}{(aX+b)^3}$
$\dots$	$\dots$

Chaque $\heartsuit$ est à remplacer par une lettre différente.

Pour les décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, on a en plus (avec $\underline{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$) :

facteur de B	Elements simples
$\left(aX^2 + bX + c\right)$	$\dfrac{\heartsuit X + \heartsuit}{aX^2 + bX + c}$
$\left(aX^2 + bX + c\right)^2$	$\dfrac{\heartsuit X + \heartsuit}{aX^2 + bX + c} + \dfrac{\heartsuit X + \heartsuit}{(aX^2 + bX + c)^2}$
$\left(aX^2 + bX + c\right)^3$	$\dfrac{\heartsuit X + \heartsuit}{aX^2 + bX + c} + \dfrac{\heartsuit X + \heartsuit}{(aX^2 + bX + c)^2} + \dfrac{\heartsuit X + \heartsuit}{(aX^2 + bX + c)^3}$
$\ldots$	$\ldots$

Exercice

Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ de $F(X) = \dfrac{2X}{(X-1)^2(X-2)(X^2+1)}$.

Notion. Prendre chacun des facteurs du dénominateur, et aller chercher dans les tableau les éléments simples correspondant à ajouter. on doit obtenir une addition de plein de petites fractions.

Exemple de décomposition en fraction rationnelle sur $\mathbb{R}(X)$

$$F(X) = \frac{X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X}{(X^2 + X + 1)(X^2 + 2X + 1)}$$

Etape 1. La division euclidienne

$$X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X = [(X^2 + X + 1)(X^2 + 2X + 1)] \times 1 + (-2X - 1)$$

Donc

$$F(X) = \frac{X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X}{(X^2 + X + 1)(X + 1)^2} = 1 + \frac{-2X - 1}{(X^2 + X + 1)(X^2 + 2X + 1)}$$

Etape 2. On recherche les racines de

$$(X^2+X+1)(X^2+2X+1)$$

X^2+X+1 a un discriminant négatif, donc ne se décompose pas dans $\mathbb{R}[X]$, mais X^2+2X+1 est une identité remarquable. On a alors

$$(X^2+X+1)(X^2+2X+1)=(X^2+X+1)(X+1)^2$$

donc

$$F(X)=\frac{X^4+3X^3+4X^2+X}{(X^2+X+1)(X+1)^2}=1+\frac{-2X-1}{(X^2+X+1)(X+1)^2}$$

Etape 3. Donc F se décompose sous la forme

$$F(X)=1+\frac{aX+b}{X^2+X+1}+\frac{c}{(X+1)^2}+\frac{d}{X+1}$$

Etape 4 :Recherche des coefficients inconnus de la décomposition

Méthode prioritaire : Les termes de plus haut degré.

1. Pour un pôle α, on repère la fraction $\dfrac{\lambda}{(X-\alpha)^n}$ qui a le plus **haut** degré n.
2. On multiplie chaque coté de l'égalité par $(X-\alpha)^n$ et on simplifie ce qu'on peut
3. Puis on pose $x=\alpha$, et on obtient alors la constante λ.

Et on recommence pour tous les pôles.

Suite de l'exemple : On a obtenu la décomposition suivante :

$$F(X) = 1 + \frac{-2X-1}{(X^2+X+1)(X+1)^2} = 1 + \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1}$$

On multiplie TOUT par $(X+1)^2$:

$$(X+1)^2 + \frac{-2X-1}{(X^2+X+1)} = (X+1)^2 + \frac{(aX+b)(X+1)^2}{X^2+X+1} + c + d(X+1).$$

$x = -1$ donne

$$0 + \frac{2-1}{(1-1+1)} = 0+0+c+0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$$

Donc

$$F(X) = 1 + \frac{-2X-1}{(X^2+X+1)(X+1)^2} = 1 + \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1}$$

Méthode de secours. Quand on a fait tous les termes faciles, on prend d'autres valeurs de x. Autant que de lettres à déterminer !

$$1 + \frac{-2X-1}{(X^2+X+1)(X+1)^2} = 1 + \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{d}{X+1}.$$

Il nous manque trois coefficients.
$x = 0$ donne

$$1 - 1 = 1 + b + 1 + d \quad \Leftrightarrow \quad b + d = 2$$

$x = 1$ donne

$$1 + \frac{-3}{3 \times 4} = 1 + \frac{a+b}{3} + \frac{1}{4} + \frac{d}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 4b + 6d = -6$$

$x = 2$ donne

$$1 + \frac{-5}{63} = 1 + \frac{2a+b}{7} + \frac{1}{9} + \frac{d}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6a + 3b + 7d = -4$$

On obtient un système

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 6a & +3b & +7d & = & -4 \\ & b & +d & = & -2 \\ 4a & +4b & +6d & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} d & = & -1 \\ b & = & -1 \\ a & = & 1 \end{array}\right.$$

Finalement

$$F(X) = 1 + \frac{X-1}{X^2+X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-1}{X+1}$$

Exercice

On a $F(X) = \dfrac{2X+1}{(X-1)^2}$ et on sait que sa décomposition en élément simple est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}$$

Déterminer a et b.

Notions

1. Pour un pôle α (racine du dénominateur), on repère la fraction $\dfrac{\lambda}{(X-\alpha)^{n_i}}$ qui est de plus haut degré n. On multiplie de chaque coté de l'égalité par $(X-\alpha)^n$. Puis on pose $x = \alpha$, et on obtient alors la constante du terme de plus haut degré.
2. Quand on a fait tous les termes faciles, on cherche à établir autant d'équations que de coefficients restant à déterminer en prenant des valeurs de x qu'on n'a pas encore utilisé (et de préférences simples).

Et il en reste quoi ?

1. On a $X^3+5X^2-1=(X^2+3)(X+5)-3X-16$. Donner la partie entière et la partie fractionnaire de
$$F=\frac{X^3+5X^2-1}{X^2+3}$$
2. $$\frac{2X+5}{X^2+X+4}$$
est-il un élément simple dans $\mathbb{C}(X)$? et dans $\mathbb{R}(X)$?
3. $$F=\frac{54X-25}{(X-1)^2(X^2+X+4)}$$
Quelle est la forme de la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$?
4. Et combien de valeurs de X faut-il prendre pour déterminer les coefficients de cette décomposition ? Quelle est la première valeur de X à choisir ?

Réponses

1. Si $X^3+5X^2-1=(X^2+3)(X+5)-3X-16$ alors
$$F=\frac{X^3+5X^2-1}{X^2+3}=X+5+\frac{-3X-16}{X^2+3}$$
$\frac{-3X-16}{X^2+3}$ est la partie fractionnaire et $X+5$ la partie entière.
2. $\frac{2X+5}{X^2+X+4}$ n'est pas un élément simple pour $\mathbb{C}(X)$ et mais c'est un un élément simple pour $\mathbb{R}(X)$ (discriminant négatif).
3. $$F=\frac{54X-25}{(X-1)^2(X^2+X+4)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{(X-1)}+\frac{cX+d}{(X^2+X+4)}$$
4. pour déterminer les coefficients de cette décomposition, on fait en premier $X=1$, puis on choisir trois autres valeurs pour X.