Polynômes et fractions rationnelles (2)

Plan

Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles = on ne peut pas les diviser.

Définition

P est irréductible sur $\mathbb{K}$ ssi :

1. $\deg(P) \geqslant 1$.
2. les seuls polynômes qui divisent P sont les polynômes constants non nuls et les λP.

Remarque :

- Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- Si un polynôme possède une racine α dans $\mathbb{K}$, alors il n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}$ puisqu'il est divisible par $(X-\alpha)$.
- Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, il peut être irréductible sur $\mathbb{R}$ mais réductible sur $\mathbb{C}$.

Exemple : X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais il ne l'est pas sur $\mathbb{C}$ car

$$X^2+1=(X-i)(X+i)$$

- Un polynôme qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement irréductible sur $\mathbb{R}$.

$X^4 + 2X^2 + 1$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$, mais il est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ car

$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$$

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème. de D'Alembert-Gauß

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Propriété.

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont $aX + b$ avec $a \neq 0$.
2. Tous les polynomes (non constant) de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés sur $\mathbb{C}$. Ils se décompose en un produit de polynômes de degré 1.
3. Tout polynôme complexe de degré $n \geqslant 1$ possède exactement n racines complexes comptées avec leur multiplicité.

Propriété.

Soit P un polynôme complexe degré n et de coefficient dominant a_n.
alors il se factorise :

$$P = a_n(X - \alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \alpha_r)^{m_r}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines de P et leur multiplicités $m_1, \ldots, m_r$.

Exercice

Soit le polynôme $P = X^2 + 4$. Déterminer les racines complexes de P et en déduire sa factorisation en produit de facteurs irréductibles.

Notions.

- les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
- on peut factoriser un polynôme en multipliant tous les termes de la forme $(X - racine)^{multiplicite}$ et le coefficient dominant.

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit P un polynôme à coefficients réels :

- les racines **réelles** de P :
  - α_1 avec multiplicité r_1
  - ....
  - α_p avec multiplicité $r_1 r_p$
- les racines **complexes** de P :
  - δ_1 et $\overline{\delta_1}$ avec multiplicité s_1
  - ....
  - δ_q et $\overline{\delta_q}$ avec multiplicité s_q.

Sur $\mathbb{C}[X]$, on factorise :

$$P = a_n(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_p)^{r_p}(X-\delta_1)^{s_1}(X-\overline{\delta_1})^{s_1}\cdots(X-\delta_q)^{s_q}(X-\overline{\delta_q})^{s_q}$$

$$P = a_n(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_p)^{r_p}\Big[(X-\delta_1)(X-\overline{\delta_1})\Big]^{s_1}\cdots\Big[(X-\delta_q)(X-\overline{\delta_q})\Big]^{s_q}$$

en développant $(X-\delta_1)(X-\overline{\delta_1})$, on trouve un polynôme du second degré réel :

$$(X-\delta_1)(X-\overline{\delta_1}) = X^2 - (\delta_1+\overline{\delta_1})X + \delta_1\overline{\delta_1} = X^2 - 2\Re e(\delta_1)X + |\delta_1|^2$$

Notons que ce polynôme ayant deux racines complexes, son discriminant est négatif.

$$P = a_n(X-\alpha_1)^{r_1}\cdots(X-\alpha_p)^{r_p}\Big[X^2 - 2\Re e(\delta_1)X + |\delta_1|^2\Big]^{s_1}\cdots$$

$$\cdots\Big[X^2 - 2\Re e(\delta_q)X + |\delta_q|^2\Big]^{s_q}$$

Propriété.

Soit P à coefficients réels de degré n. Le polynôme P se factorise :

$$P = a_n(X-\alpha_1)^{r_1} \cdots (X-\alpha_p)^{r_p}(\underbrace{X^2 - \beta_1 X + \gamma_1}_{\Delta<0})^{s_1} \cdots (\underbrace{X^2 - \beta_q X + \gamma_q}_{\Delta<0})^{s_1}$$

avec

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines **réelles** de P de multiplicités $r_1, \ldots, r_p$
- a_n le coefficient dominant de P
- $X^2 - \beta_1 X + \gamma_1$ des polynômes réels à discriminant strictement négatif.

Exercice

Soit P un polynôme réel de degré 7, de coefficient dominant 2, dont on connait les racines suivantes : $2i$ racine double et i, $-i$, -3 racines simples.

1. En déduire la ou les racines complexes manquantes.
2. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis en déduire celle dans $\mathbb{R}[X]$.

- on peut factoriser un polynôme en multipliant tous les termes de la forme $(X - racine)^{multiplicite}$ et le coefficient dominant.
- si on a r et $\bar{r}$ des racines complexes conjuguées, en développant $(X - r)(X - \bar{r})$ on obtient un polynôme réel de degré 2 à discriminant négatif.

Propriété.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

- les polynômes de degré 1 : $aX + b$ avec $a \neq 0$)
- les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif : $aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta < 0$).

Recherche de racines entières pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers

Pour un polynôme P **à coefficients entiers** :
on teste si les **diviseurs du coefficient constant** sont des racines.

Exemple : Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme
$P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exercice

Trouvez une racine entière de $P = 2X^3 + 7X^2 + 6X + 9$ puis décomposez-le en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

- Pour un polynôme à coefficients entiers, on regarde le coefficient constant et on teste si les diviseurs de ce coefficient sont des racines.
- on peut factoriser un polynôme en multipliant tous les termes de la forme $(X - racine)^{multiplicite}$ et le coefficient dominant si on a toutes les racines.
- Les polynôme réel de degré 2 à discriminant négatif sont irréductibles

Relations coefficients-racines pour un polynôme scindé

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n et scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ses racines distinctes ou non. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Et il en reste quoi ?

1. Le polynôme $X^2 + X + 4$ est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Dans le polynôme $P = 76X^6 - 33X^5 + 54X^3 + 7X^2 - 22$, quelles nombres entiers peut-on tester lorsqu'on cherche des racines ?
3. P a pour racines i avec multiplicité 3 et $2 - i$ avec multiplicité 2, il est de degré 5 et de coefficient dominant 7. Que vaut P ?

Réponses

1. $X^2 + X + 4$ n'est pas irréductible pour $\mathbb{C}[X]$. Il est irréductible pour $\mathbb{R}[X]$ car le discriminant est négatif.
2. Dans le polynôme $P = 76X^6 - 33X^5 + 54X^3 + 7X^2 - 22$, on peut tester 1, -1, 2, -2, 11 et -11 lorsqu'on cherche des racines
3. P a pour racines i avec multiplicité 3 et $2 - i$ avec multiplicité 2, il est de degré 5 et de coefficient dominant 7, donc $P = 7(X - i)^3(X - 2 + i)^2$.