Polynômes et fractions rationnelles

Plan

1. Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

2. Racines d'un polynôme

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est

$$P : \ x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ les coefficients de P.

Un monôme est $x \mapsto a_n x^n$.

Notation : On note $X^k : x \mapsto x^k$, ce qui permet d'écrire

$$P = P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

X est une fonction, ce n'est pas une variable.

Exemples :

1. Le polynôme nul est noté 0.
2. Le polynôme $P : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$ est noté $P = 3X^2 + 2X - 1$.

Définition

$\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- On peut additionner, soustraire et multiplier des polynômes.
- On peut les multiplier par une constante.
- On peut dériver et primitiver les polynômes.

Exemple :

- $\mathbb{R}[X]$ contient les polynômes 0, 4, $5X^2 - 3X + 2$, $\pi X^{12} - 6X$.
- 0, 4, $5X^2 - 3X + 2$, $\pi X^{12} - 6X$ et $iX^3 + 3$ appartienntt à $\mathbb{C}[X]$
- $iX^3 + 3$ n'appartient pas à $\mathbb{R}[X]$

Propriété.

Si $P = 0$ fonction nulle, $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0$,
alors tous les coefficients de P sont nuls.

Si $P = Q$,$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = Q(x)$,
alors P et Q ont les mêmes coefficients.

Démonstration. (dans $\mathbb{R}[X]$) Soit P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$.

(Par l'absurde) On suppose qu'au moins un des coefficients de P est non nul. Notons M le plus grand indice des coefficients non nuls. Donc

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_M x^M + \cdots + a_1 x^1 + a_0, \qquad a_M \neq 0$$

- Si $M = 0$, alors $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = a_0, \qquad P(x) = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

- Si $M > 0$, alors on a

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_M x^M = \pm\infty$$

  Or comme $P = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = 0$.

Donc tous les coefficients de P sont nuls.

Degré d'un polynôme

Définition

Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ **non nul**

- Le degré de P $\deg(P)$ est le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$ soit non nul.
- Ce coefficient est le coefficient dominant de P
- Le degré du polynôme nul est $-\infty$ par convention.
- Un polynôme non nul est unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n.

Exemples :

1. $-4X^5 + 3X + 1$: degré 5, coefficient dominant -4.
2. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls.
3. Les trinômes du second degré sont les polynômes de la forme $aX^2 + bX + c$, où a est non nul.
4. $X^3 + 2X + 5$ est unitaire.
5. $$\mathbb{R}_2[X] = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

   il contient les trinômes du second degré, les polynômes de degré 1 et des polynômes constants (polynôme nul compris).

Exercice

Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme suivant

$$P = X^4 + 23X^5 - 9X^3 + 18X^2 - 9X^5 + 7X^4 + 7X^3 + 76X - 14X^5 + X^4 - 8$$

Notions. Le degré de P est la plus grande puissance de X ayant un coefficient non nul. On le note $\deg(P)$. Ce coefficient est appelé le coefficient dominant de P.

Propriété.

1. $$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$$

   Plus précisément :
   - Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$.
   - Si P et Q ont même degré d et si la somme de leurs coefficients dominants est non nulle, alors $P+Q$ est aussi de degré d.
2. Si $\lambda \neq 0$ (constante), alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
3. $$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Remarque : Si P et Q degré d, alors le degré de $P+Q$ peut être strictement inférieur à d.

$$P = 3X^5 + 2, \quad Q = -3X^5 + 4X, \qquad P + Q = 4X + 2$$

Propriété.

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } P \text{ n'est pas constant,} \\ -\infty & \text{si } P \text{ est constant.} \end{cases}$$

Plus généralement, si $deg(P) = n$:

- $P^{(k)}$ est de degré $n - k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
- Pour $k \geqslant n + 1$, $P^{(k)}$ est le polynôme nul.

Exemple : Si l'on dérive plus de trois fois un polynôme de degré 3, on obtient le polynôme nul.

Arithmétique des polynômes

Théorème. division euclidienne

Pour tous polynômes A et B, $\underline{B \neq 0}$, il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tel que

$$A = QB + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Remarque : « Effectuer la division euclidienne de A par B », c'est trouver les polynômes Q et R.

Exemple : Effectuons la division de $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice

Faire la division euclidienne de $A = 6X^4 - 8X^3 + 3X^2 - 2X + 5$ par $B = 2X^2 - 2X + 3$.

Définition

B divise A (noté $B \mid A$) $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme Q tel que $A = Q.B$.

Vocabulaire : A est divisible par B. A est un multiple de B. B est un diviseur de A.

Exemple : Le polynôme $X^2 - 1$ est un multiple de $X + 1$ car

$$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$$

Propriété.

B divise $A \Leftrightarrow$ le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Plan

Définition

Le nombre α est une racine de $P \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$.

Remarque : Le polynôme nul admet tout les nombres pour racine.

Exercice

Déterminer les racines r_1 et r_2 du polynômes $P = 2X^2 + 2X - 12$.
Sans calcul, $P(r_1) = \cdots$ et $P(r_2) = \cdots$?

Propriété.

α est une racine de $P \Leftrightarrow (X-\alpha)$ divise P.

Démonstration.

- Si $(X-\alpha)$ divise P :
$$P = (X-\alpha)Q$$
$$x = \alpha \quad \Rightarrow \quad P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$$
Donc α est une racine de P.
- Si α est une racine de P
$$P = (X-\alpha)Q + R, \quad \text{avec } deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1$$
Donc $R = c$ constant.
$$P = (X-\alpha)Q + c \quad \Rightarrow P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + c = c$$
Or $P(\alpha) = 0$ donc $c = 0$, donc $R = 0$.
$$P = (X-\alpha)Q$$
Donc $(X-\alpha)$ divise P

Exemple : 5 est une racine de $P = X^3 - 5X^2 = (X-5)X^2$.

Exercice

Les racines du polynômes $P = 2X^2 + 2X - 12$ sont $r_1 = 2$ et $r_2 = -3$. Donner deux polynômes de degré 1 divisant P.

Définition

Soit $P \neq 0$ et α est une racine de P.

L'ordre de multiplicité de α est la puissance m maximale telle que $(X-\alpha)^m$ divise P :

$(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

- racine de multiplicité 1 = racine simple
- racine de multiplicité 2 = racine double
- racine de multiplicité 3 = racine triple.

Exemple : 5 est une racine du polynôme $P = X^3 - 5X^2$.

$$P = (X-5)X^2 = (X-5)^1 X^2$$

Si on divise P par $(X-5)^2$, on obtient

$$P = (X-5)^2(X-5) + (25X - 125)$$

$(X-5)^2$ ne divise pas P.
Donc 5 est racine simple (multiplicité un).

Propriété.

$P \neq 0$ et α une racine de P.

α est une racine de multiplicité $m \Leftrightarrow$

1. $$P(X) = (X - \alpha)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

2. $$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Exemple : $P = X^3 - 5X^2$.

1. $P(0) = 0$ donc 0 est racine de P
2. $P' = 3X^2 - 10X$ donc $P'(0) = 0$: 0 est racine de P'
3. $P'' = 6X - 10$ et $P''(0) = -10 \neq 0$.

Donc 0 est une racine double de P.

Exercice

(TD) Soit $P = X^3 - 3X + 2$. Calculer $P(1)$, $P'(1)$ et $P''(1)$. Que peut-on en déduire sur le nombre 1 ? Et sur un polynôme diviseur de P ?

Notions.

- L'ordre de multiplicité de la racine α de P est l'exposant m maximal tel que $(X - \alpha)^m$ divise P.
- Le nombre α est une racine de multiplicité m de P si et seulement si on a :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Propriété.

Soit P à coefficients **réels**.

Si α est une racine complexe de P de multiplicité m,
alors son conjugué $\overline{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité m.

Propriété.

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

1. Si $P \neq 0$ alors la somme des multiplicités des racines de P est $\leqslant n$.
2. Si $P \neq 0$ est non nul, alors P a au plus n racines distinctes.
3. Si P a au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$ (polynôme nul)

Propriété.

1. Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.
2. P et Q degrés $\leqslant n$. Si P et Q coïncident en au moins $(n+1)$ points

$$P(x_1) = Q(x_1), \quad P(x_2) = Q(x_2), \cdots \quad P(x_{n+1}) = Q(x_{n+1})$$

alors $P = Q$.

Propriété.

Soit $P \neq 0$, tel que $deg(P) = n$ et de coefficient dominant a_n.
Ses racines : α_1 de multiplicité m_1, α_2 de multiplicité m_2, ... , α_r de multiplicité m_r.

Si

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

alors P se factorise :

$$P(X) = a_n(X - \alpha_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

P est **scindé** sur $\mathbb{K}$.

Exemples : $P = X^3 - 5X^2$ a pour racine 5 (multiplicité 1) et 0 (multiplicité 2).
La somme des multiplicités est

$$1 + 2 = 3 = \deg(P)$$

Le polynôme P est scindé et se factorise

$$P = 1(X-5)X^2$$

Par contre $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$ car il n'a pas de racines réelles.

Exercice

(TD) Soit $P = X^3 - 3X + 2$. On sait que 1 est une racine double de P. Calculer $P(-2)$. Que peut-on en déduire sur la factorisation de P ?

Notion. Si la somme des multiplicités des racines est égale au degré de P, alors P est scindé et on peut factoriser P en multipliant tous les termes de la forme $(X - racine)^{multiplicite}$ et le coefficient dominant.

Et il en reste quoi ?

1. Quel est le degré et le coefficient dominant du polynôme $P = X^2 - 3X^4 + 5X$?
2. Dans la division euclidienne $P = AQ + B$ de P par Q, comment s'appelle A ? et B ?
3. Quelles sont les racines de $P = (X+2)^2(X-3)$? avec quelle multiplicité ?
4. Le polynôme $P = (X+1)^4(X-5)$ est-il scindé ?

Réponses

1. Le degré de $P = X^2 - 3X^4 + 5X$ est 4 et le coefficient dominant -3.
2. Dans la division euclidienne $P = AQ + B$ de P par Q, A est le quotient et B le reste.
3. les racines de $P = (X+2)^2(X-3)$ sont -2 avec multiplicité 2 et 3 avec multiplicité 1.
4. $P = (X+1)^4(X-5)$ est scindé.