Plan

Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit Δ un nombre complexe fixé.

Une racine carrée de Δ est δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Exemple :

Remarque : On ne peut pas noter $\sqrt{-1} = i$, la notation $\sqrt{\ }$ est strictement interdite dans $\mathbb{C}$. On est obligé de l'écrire en français : Une racine carré de -1 est i.

La racine carrée complexe est compatible avec multiplication/division :

si a est une racine carrée de A et b une racine carrée de B,

- ab est une racine carrée de AB
- $\frac{a}{b}$ est une racine carrée de $\frac{A}{B}$
- a^n est une racine carrée de A^n

Mais ça ne marche pas avec soustraction/addition !

Technique : Trouver les racines carrées de $\Delta = \heartsuit e^{i\spadesuit}$ (forme exponentielle).

On cherche $\delta = \rho e^{i\theta}$ (ρ et θ inconnus) tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$(\rho e^{i\theta})^2 = \heartsuit e^{i\spadesuit} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 e^{i2\theta} = \heartsuit e^{i\spadesuit}$$

On sépare module et argument :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho^2 & = & \heartsuit \\ 2\theta & = & \spadesuit + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \rho & = & \sqrt{\heartsuit} \quad \text{car } \rho \text{ et } \heartsuit > 0 \\ \theta & = & \frac{\spadesuit}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

- $k = 0 \Rightarrow \quad \delta_1 = \sqrt{\heartsuit} e^{i\frac{\spadesuit}{2}}$
- $k = 1 \Rightarrow \quad \delta_2 = \sqrt{\heartsuit} e^{i\left(\frac{\spadesuit}{2} + \pi\right)}$
- $k = 2, 3, 4, \dots, -1, -2, -3, -4 \dots$ On retrouve les deux solutions précédentes.

Exemple : Trouver les racines carrées de $3e^{i\frac{\pi}{5}}$

On cherche $\delta = \rho e^{i\theta}$ tel que $\delta^2 = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$.

$$\rho^2 e^{i2\theta} = 3e^{i\frac{\pi}{5}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \rho^2 & = & 3 \\ 2\theta & = & \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & \sqrt{3} \\ \theta & = & \frac{\pi}{10} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Donc les racines carrées sont $\delta_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{10}}$ et $\delta_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{10}}$.

Exercice

Mettre sous forme exponentielle $-18i$ puis calculer ses racines carrées complexes.

Notions

- Le module d'un complexe est la distance à l'origine et son argument est une mesure de l'angle par rapport à "l'horizontale".
- . On appelle racine carrée de Δ tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.
- Chercher δ sous forme exponentielle en identifiant les modules et les arguments (ne pas oublier les $2k\pi$).

Propriété.

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées :

- ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre
- Graphiquement, les deux racines sont symétriques par rapport à l'origine.

Technique : Recherche des racines carrées de $\Delta = \clubsuit + i\spadesuit$ (forme algébrique).

On cherche $\delta = a + ib$ (a et b inconnus) tel que $\delta^2 = \Delta$

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ \boxed{|\delta|^2 = |\Delta|} \end{cases} \quad \textit{astuce !}$$

On reporte les formes algébriques dans les deux équations :

$$\begin{cases} (a+ib)^2 = \clubsuit + i\spadesuit \\ \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |\clubsuit + i\spadesuit| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + 2ab\, i = \clubsuit + i\spadesuit \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\clubsuit^2 + \spadesuit^2} = \heartsuit \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2ab\ i = \clubsuit + i\spadesuit \\ a^2 + b^2 = \heartsuit \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \clubsuit & (L_1) \\ 2ab = \spadesuit & (L_2) \\ a^2 + b^2 = \heartsuit & (L_3) \end{cases}$$

1. $L_1 + L_3$ donne a^2, donc deux valeurs de a.
2. deux valeurs de b avec L_2
3. deux valeurs de $\delta = a + ib = ...$

Exemple : Déterminer les racines carrées de $\Delta = -3-4i$.
On cherche $\delta = a+ib$ tel que

$$\delta^2 = -3-4i$$

Or $|\delta|^2 = |-3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$. Donc

$$\left\{\begin{array}{l} (a+ib)^2 = -3-4i \\ \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2+2ab\ i = -3-4i \\ a^2+b^2 = 5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2+b^2 = 5 \end{array}\right.$$

L_1+L_3 : $2a^2 = 2$ donc $a=1$ ou $a=-1$.

- Pour $a=1$, on a $b=-2$ donc $\delta = 1-2i$.
- Pour $a=-1$, on a $b=2$ donc $\delta = -1+2i$.

Exercice

Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $-5 - 12i$.

Notions

- On appelle racine carrée de Δ tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.
- Chercher δ sous forme algébrique en identifiant les parties réelles et imaginaires.
- sans oublier d'utiliser les modules en bonus : $|\delta|^2 = |\Delta|$.

Racines d'un trinôme du second degré complexe

Théorème.

$$az^2 + bz + c = 0$$

le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$: solution double

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta \neq 0$, on calcule δ une racine carrée de Δ. les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

Remarque : Si équation réelle avec un discriminant négatif : deux solutions complexes conjuguées.

Plan

Racines n-ièmes de l'unité

Définition

Soit $n > 0$ entier. Les racines *n-ièmes* de l'unité sont les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$.

L'ensemble de ces solutions est noté $\mathbb{U}_n$.

Technique : On cherche $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$ tel que $z^n = 1$:

$$(\rho\, \mathrm{e}^{i\theta})^n = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho^n\, \mathrm{e}^{in\theta} = 1 e^{i0}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n}. \end{cases}$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont donc $z = 1 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

on prend

$$k = 0, \quad k = 1, \dots, k = n-1$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont :

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = \exp\frac{2i\pi}{n}, \ \dots \omega_k = \exp\frac{2ik\pi}{n}, \ \dots \omega_{n-1} = \exp\frac{2i(n-1)\pi}{n}.$$

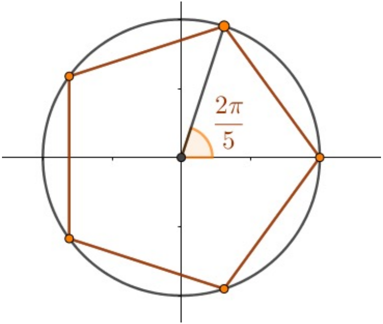
Donc

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n};\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\pi/n};\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$$

Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes.

Interprétation géométrique :

Les racines n-ièmes de l'unité sont de module 1, donc sur le cercle unité. Les points de $\mathbb{U}_n$ dessinent un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.



Images des racines cinquièmes de l'unité.

Exercice

écrire les racines cubiques et quatrièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe quelconque

Définition

Soit $n > 0$

Les racines n-ièmes de a sont les solutions de l'équation

$$z^n = a$$

Technique : Racines n-ièmes de $a = \heartsuit e^{i\spadesuit}$ (forme exponentielle).

$\boxed{\text{On cherche } z = \rho e^{i\theta} \text{ (forme exponentielle) tel que } z^n = a}$

$$(\rho e^{i\theta})^n = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \rho^n & = & \heartsuit \quad (\in \mathbb{R}^+) \\ n\theta & = & \spadesuit + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \rho & = & \sqrt[n]{\heartsuit} \\ \theta & = & \frac{\spadesuit}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{array} \right. \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\heartsuit} e^{i\left(\frac{\spadesuit}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ donnent alors les n racines n-ièmes de a.

Géométriquement, les racines n-ièmes de a dessinent un polygone régulier à n côtés.

On cherche les racines n-ièmes de a, donc les solutions de l'équation $z^n = a$. Mais on n'arrive pas à mettre a sous forme exponentielle

Technique : (cas particulier)

- On trouve une solution particulière de cette équation z_p (c'est à dire z_p tel que $z_p^n = a$).
- On calcule les racines n-ièmes de l'unité : $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.
- Les racines n-ièmes de a sont alors

$$z_0 = z_p \times \omega_0, \quad z_1 = z_p \times \omega_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = z_p \times \omega_{n-1}$$

Exemple : Déterminer les racines cubiques de $-(1+2i)^3$.

- On pose $z_p = -(1+2i)$

$$z_p^3 = (-(1+2i))^3 = -(1+2i)^3 = a$$

- Les racines cubiques de l'unité sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$.
- donc les racines cubiques de a sont $z_1 = -(1+2i)$,

$$z_2 = -(1+2i)e^{2i\pi/3} = (-1-2i)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}+\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

et

$$-(1+2i)e^{-2i\pi/3} = (-1-2i)(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}-\sqrt{3}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Et il en reste quoi ?

1. C'est quoi une racine carré d'un nombre complexe a ?
2. et une racine n-ième ?
3. Quelles sont les deux méthodes possibles pour trouver les racines carrées ? (en une ligne)
4. Donner les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans le cas où il y en a deux.

Réponse.

1. une racine carré d'un nombre complexe a est z tel que $z^2 = a$.
2. une racine n-ième d'un nombre complexe a est z tel que $z^n = a$.
3. les deux méthodes possibles pour trouver les racines carrées : En posant $z = x + iy$ (forme algébrique) ou en posant $z = \rho e^{i\theta}$ (forme exponentielle).
4. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une racine carrée de Δ. Alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$