Les nombres complexes

(2)

Plan

Propriété. formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

linéariser des polynômes trigonométriques

Technique : produit de cos/sin $\to$ somme de cos/sin :

1. Formules d'Euler, remplacer sinus et cosinus :

$$\cos\theta \to \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) \qquad \sin\theta \to \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

2. Développer TOUT (produit et puissance)
3. Regrouper les paires $(e^{i\heartsuit}+e^{-i\heartsuit})$ et $(e^{i\heartsuit}-e^{-i\heartsuit})$.
4. Formules d'Euler, retrouver sinus et cosinus

$$(e^{i\heartsuit}+e^{-i\heartsuit}) \to 2\cos\heartsuit, \qquad (e^{i\heartsuit}-e^{-i\heartsuit}) \to 2i\sin\heartsuit$$

Exemple :

$$
\begin{aligned}
(\cos x)^3 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{i3x} + +3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{-2ix}e^{ix} + e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{(e^{i3x}+e^{-3ix}) + 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{8} \\
&= \frac{(e^{i3x}+e^{-3ix}) + 3(e^{ix}+e^{-ix})}{8} \\
&= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x
\end{aligned}
$$

Application : calculer des primitives de fonctions trigonométriques.

Exemple : Une primitive de $\cos^3(x)$ est

$$F(x) = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

Exercice

Linéariser $\sin^2 x$ et $\cos^4 x$.

Technique de l'angle moitié

$$z = \mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{i\beta}$$

L'angle moitié entre α et β est $\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\Rightarrow$ factorisisation de force par $\boxed{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}$:

$$z = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} + \frac{\mathrm{e}^{i\beta}}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} \right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \Big(\text{formule d'Euler}\Big)$$

$$z = 2\cos(\heartsuit)\, e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

- Si le cosinus est positif : Le module est $2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ et l'argument est $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
- Si le cosinus est négatif, on fait rentrer le $-$ dans l'argument en rajoutant π à l'angle.

Plan

Propriété. formule de De Moivre

n entier, θ réel

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

$$(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

Technique : $\cos(nx)$ et $\sin(nx) \to$ puissances de $\cos x$ et $\sin x$

1. Ecrire la formule de Moivre

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos x + i\sin x)^n$$

2. Développer à droite par la formule du binôme.
3. Séparer le résultat :
   - La partie réelle $= \cos(nx)$.
   - La partie imaginaire $= \sin(nx)$.
4. Simplifier éventuellement en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exemple : Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3$$

$$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$$

Donc

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$= 3\cos x + 4\cos^3 x$$

et

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x = -\sin^3 x + 3(1 - \sin^2 x)\sin x$$

$$= -4\sin^3 x + 3\sin x$$

Plan

- x un réel $\to e^x$ réel.
- iy (y réel) $\to e^{iy} = \cos y + i \sin y$ sur le cercle unité
- z complexe, $\to e^z = ?$

Définition

$z = x + iy$ sous forme algébrique. L'exponentielle de z est

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{iy}$$

Exercice

On pose $z = 5 + i\frac{\pi}{4}$. Calculer e^z et l'exprimer sous forme algébrique.

Propriété.

$$\mathrm{e}^z \neq 0, \quad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}, \quad \mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Si $z = x + iy$, alors

$$|\,\mathrm{e}^z\,| = e^x, \qquad \arg(\mathrm{e}^z) = y\ [2\pi]$$

$$\Re e(e^z) = e^x \cos y, \qquad \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y$$

Démonstration.

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Propriété.

$a \neq 0$.
L'équation $e^z = a$ d'inconnue z possède au moins une solution.

Technique : $a \in \mathbb{C}^*$. On veut résoudre

$$e^z = a \qquad \text{inconnue } z \in \mathbb{C}$$

$\boxed{a = \heartsuit e^{i\spadesuit} \text{ (forme exponentielle). } z = x + iy \text{ (forme algébrique)}}$

$$e^x e^{iy} = \heartsuit e^{i\spadesuit} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \heartsuit & (\in \mathbb{R}^+) \\ y = \spadesuit + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(\heartsuit) \\ y = \spadesuit + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le solutions de l'équation sont

$$z = \ln(\heartsuit) + i(\spadesuit + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Et il en reste quoi ?

1. $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = ?$
2. $(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})^6 = ?$
3. Pour $z = 3 - 4i$, que vaut e^z ?
4. si $e^{x+iy} = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ alors

   $$x = 3; \quad x = e^3; \quad x = \ln 3; \quad y = \frac{\pi}{5}, \quad y = \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{5} + k\pi?$$

Réponse.

1. $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$
2. $\cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = -1$
3. Pour $z = 3 - 4i$, $e^{z} = e^{3}e^{-4i}$
4. si $e^{x+iy} = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$, alors $x = \ln 3$ et $\frac{\pi}{5} + 2k\pi$