# Les nombres complexes
(1)

# Plan

## Définition

Un nombre complexe est

$$z = a + ib, \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

avec $i$ un nombre tel que $i^2 = -1$.

- $a + ib$ est la forme algébrique de $z$
- $a$ est la partie réelle de $z$ : $a = \Re e(z)$
- $b$ est la partie imaginaire de $z$ : $b = \mathrm{Im}(z)$.

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes

**Remarque :** La partie imaginaire est un nombre réel : $\mathrm{Im}(3 + 5i) = 5$.

- un réel $a = a + 0i$ est aussi complexe.
- $ib$ est un imaginaire pur
- Les opérations classiques ( $+, -, \times, \div$) dans $\mathbb{C}$ se font comme dans $\mathbb{R}$, mais on DOIT remplacer tous les $i^2$ par $-1$, et organiser les parties réelles/imaginaires.
- Jamais d'inégalité dans $\mathbb{C}$ !

**Exercice**

Calculer $(1+i)^3$ et l'exprimer sous forme algébrique.

**Propriété.**

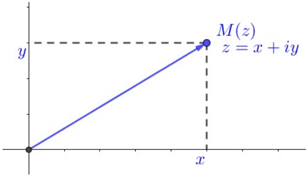
Deux nombres complexes sont égaux

$$\Leftrightarrow$$

ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

# Le plan complexe

le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.




## Définition

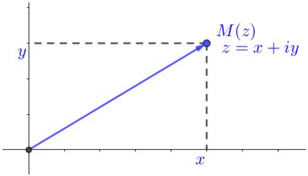
$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad M(x, y)$$

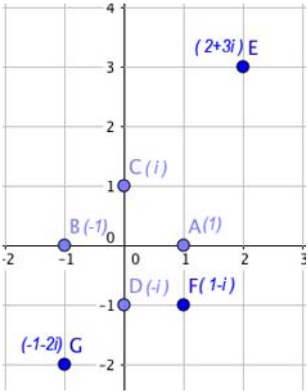
- $z$ est l'affixe du point $M$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$)
- $M$ est l'image de $z$
- $(Ox)$ est l'axe des réels
- $(Oy)$ est l'axe des imaginaires purs.

## Exercice

Placer les nombres 1, $i$, -1, $-i$, $2+3i$, $1-i$ et $-1-2i$ sur le plan complexe.

**Notion.**




( 2+3i ) E
C ( i )
B (-1)
A (1)
D (-i )
F( 1-i )
(-1-2i) G
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3

# Conjugué d'un nombre complexe

**Définition**

Le conjugué de $z = a + ib$ est

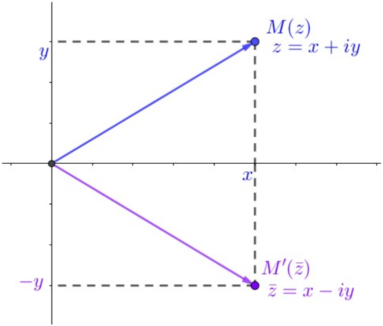
$$\overline{z} = a - ib$$

**Exemple :**

- $\overline{5} = 5$
- $\overline{-3 + 9i} = -3 - 9i$
- $\overline{4i} = -4i$
- $\overline{7 - 8i} = 7 + 8i.$

# Interprétation géométrique :

$M'(\bar{z})$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de $M(z)$.



**Propriété.**

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$ :

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}, \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$

**Propriété.**

$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$\Re e(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

$z$ est un nombre réel $\Leftrightarrow z = \overline{z}$.
$z$ est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

**Technique :** Pour mettre un nombre complexe avec du $i$ au dénominateur sous forme algébrique :
on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{Z}{a+ib} = \frac{Z(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \text{.... et on développe.}$$

**Exercice**

écrire le nombre complexe $z = \dfrac{1-i}{2+3i}$ sous forme algébrique.

# Plan

# Module d'un nombre complexe

**Définition**

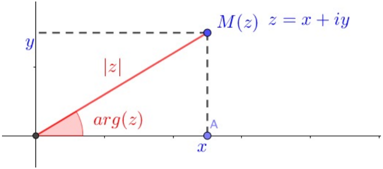
$z = a + ib$ et $M(z)$

Le module de $z$ est

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a $|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$

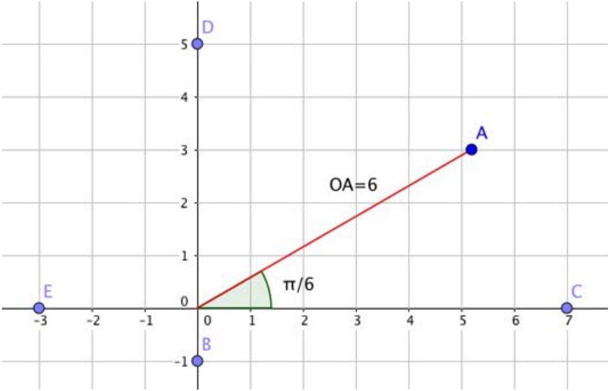
Si $z \neq 0$, un argument de $z$ est $arg(z)$ une mesure $\theta$ en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$.



**Remarque :**

1. On note souvent le module $\rho$ et l'argument $\theta$
2. Si $z = a$ réel. $|a| =$ module $=$ valeur absolue de $a$.
3. 0 n'a pas d'argument
4. L'argument d'un nombre complexe est défini à $2\pi$ près.

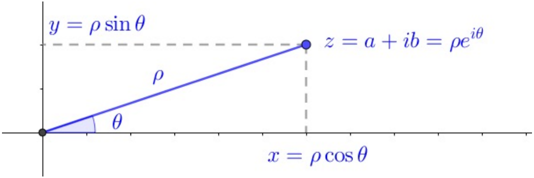
**Exemple :** Sans calcul, donner le module et l'argument des nombres complexes $a = 3\sqrt{3} + 3i$, $b = -i$, $c = 7$, $d = 5i$, $e = -3$ représentés graphiquement ci-dessous.



# Calculer module et argument

$z = a + ib$ (non nul)

$$\begin{cases} \rho & = & \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta & = & \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta & = & \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$



**Propriété.**

$$|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$

$$|zz'| = |z||z'|, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|},$$

$$\forall n \geqslant 0, \quad |z^n| = |z|^n$$

$$|\overline{z}| = |z|$$

## Propriété.

à $2k\pi$ près :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z), \qquad \arg(\overline{z}) = -\arg(z)$$

$$\arg(-z) = \theta + \pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

$$\arg(z) = \arg(z') \quad \Leftrightarrow \quad z' = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

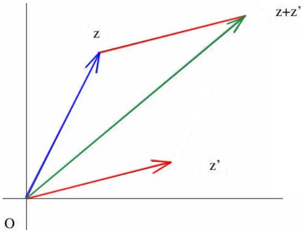
**Attention :** le module n'est pas compatible addition/soustraction !

## Propriété. Inégalité triangulaire

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement si $z=0$ ou si le quotient $\dfrac{z'}{z}$ est un nombre réel positif ou nul.

-

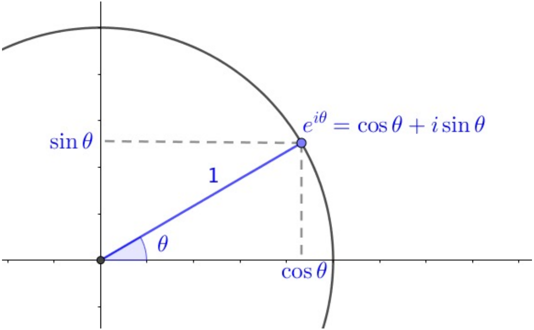


# Nombres complexes de module 1

Le cercle unité est le cercle de centre $O$ et de rayon 1.

$M(z)$ sur ce cercle a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta = arg(z)$

$$\boxed{z = \cos\theta + i\sin\theta}$$



## Définition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Le nombre $\mathrm{e}^{i\theta}$ est l'unique nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta$.

**Exemples :** $e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

## Exercice

Donner la forme algébrique de $e^{i\pi}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On note $\mathbb{U}$ le cercle unité (ensemble des nombres complexes de module 1) :

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ &= \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi[\}. \end{aligned}$$

**Théorème.**

$z = a + ib$ de module $\rho$ et d'argument $\theta$.

La forme trigonométrique de $z$ :

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La forme exponentielle de $z$ :

$$z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

**Remarque :** les formes sont liées :

$$z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \underbrace{\rho\cos\theta}_{a} + i\,\underbrace{\rho\sin\theta}_{b}$$

## Exercice

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 - i$, et écrire $z$ sous forme exponentielle.
2. écrire $z$ sous la forme algébrique sachant que $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

# Propriétés de $e^{i\theta}$

La notation $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ se comporte comme une exponentielle lors des calculs :

**Propriété.**

$\forall(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{Z}$ :

$$\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)} = \mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\varphi}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\varphi)},$$

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n, \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

**Exercice**

Calculer $(1+i)^7$.

Mais il y a des propriétés spécifiques :

**Propriété.**

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{i2k\pi} = 1$.
- Si $e^{i\theta} = 1$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = 2k\pi$.
- $\forall k \in \mathbb{Z}$ , $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.
- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, alors $\varphi = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

# Et il en reste quoi ?

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Quelle est la forme algébrique de $z$ ? et sa forme exponentielle ?
2. Quelle est la partie réelle de $z$ ? et sa partie imaginaire ?
3. Quel est le module de $z$ ? Et un argument de $z$ ?
4. c'est quoi la définition de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ?

# Réponse.

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$$

1. la forme algébrique est $-1 + i\sqrt{3}$ et la forme exponentielle $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. la partie réelle est -1. la partie imaginaire est $\sqrt{3}$
3. Le module est 2. l'argument $\frac{2\pi}{3}$
4. $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$